A. HRISTEV

MECANICĂ ȘI ACUSTICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1984

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

ANATOLIE HRISTEV

MECANICĂ ȘI ACUSTICĂ



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Notă

Lucrarea de față reprezintă cursul predat de autor de cîțiva ani la Facultatea de Fizică a Universității din București, anul I (în cadrul cursurilor de Fizică generală).

Partea experimentală a cursului este editată separat: ***Mecanica fizică și Acustică — Lucrări practice,*** **ediția V, Centrul de Multiplicare al Universității București, 1981; la fel, partea aplicativă:** ***Probleme de Mecanică fizică și acustică,*** **ediția II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.**

Referent științific: prof. dr. fiz. GEORGE MOISIL

Redactor: prof. ***G. ENESCU***
Tehnoredactor: ***OPRIȘEANU ELENA***
Grafician: ***IUFU RODICA***

CUPRINS

INTRODUCERE

CAP. 1. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

CAP. 2. PRINCIPIILE DINAMICII

CAP. 12. MECANICA SOLIDULUI ELASTIC

CAP. 13. MECANICA FLUIDELOR

CAP. 14. OSCILAŢII

CAP. 15. UNDE ELASTICE

CAP. 16. SISTEME ACUSTICE

INTRODUCERE

Studiul fizicii începe obligatoriu cu studiul *mecanicii*, deoarece în cadrul mecanicii se învaţă noţiunile fundamentale : traiectorie, viteză, acceleraţie, forţă, masă, lucru mecanic, energie, impuls, moment cinetic etc. şi se stabilesc legi fundamentale : principiile mecanicii, teoremele impulsului, momentului cinetic, energiei cinetice, conservării energiei mecanice etc., noţiuni şi legi folosite în toate capitolele fizicii.

Să facem cîteva observaţii generale asupra fizicii, apoi asupra *mecanicii*.

1. Fizica — ştiinţă a naturii. *Fizica* (physis = natură, în limba greacă) studiază cele mai generale şi mai simple forme de mişcare a materiei (mecanice, termice, electromagnetice etc.).

Prin *materie* se înţelege realitatea obiectivă care există în mod independent de conştiinţa umană şi este reflectată adecvat de aceasta.

Atributul fundamental al materiei, modul său de existenţă, este mişcarea. Prin *mişcare* se înţelege orice schimbare sau proces : deplasare mecanică în spaţiu, reacţie chimică, radiaţie electromagnetică, proces biologic, gîndire.

Formele fizice de mişcare a materiei participă totdeauna şi la formele superioare, mai complexe, de mişcare (biologice, sociale etc.), fără a epuiza însă esenţa lor calitativă. Astfel, legea conservării energiei se aplică tuturor proceselor : chimice, biologice etc. ; legea atracţiei universale se aplică tuturor corpurilor : simple sau complexe, vii sau neînsufleţite ş.a.m.d.

Scopul fizicii este descrierea, explicarea şi prevederea fenomenelor naturii, pentru a le putea stăpîni şi folosi.

Dezvoltarea fizicii a fost stimulată de *necesităţile practice* ale oamenilor. La rîndul lor descoperirile şi realizările fizicii stau la baza dezvoltării *tehnicii ;* metodele de cercetare fizice şi aparatura creată de fizicieni se aplică şi în celelalte ştiinţe ale naturii (de exemplu, în chimie, biologie).

Fizica stabileşte legi pe baza observaţiilor şi a experimentului ştiinţific. *Legea* exprimă legătura necesară şi esenţială între fenomene, legătura dintre cauză şi efect, care condiţionează o dezvoltare determinată a fenomenelor.

Observaţia este studiul fenomenului în condiţiile sale naturale de desfăşurare, în timp ce *experimentul* ştiinţific este reproducerea fenomenului în diverse condiţii create artificial, cu scopul de a descoperi legităţile fenomenului.

Legile fizicii pot fi stabilite (descoperite şi formulate) numai într-o anumită etapă sau grad de dezvoltare a practicii social-istorice, a ştiinţelor, a tehnicii şi de obicei în urma unor nenumărate şi îndelungate cercetări.

După milenii de dezvoltare istorică a civilizației au putut fi stabilite, de exemplu, legile mișcărilor planetelor (J. Kepler 1609, 1619), legea inerției (Galilei 1632), legile mecanicii (I. Newton 1687), legea atracției universale (I. Newton 1687), legile mecanicii relativiste (A. Einstein 1905), legile mecanicii cuantice (1925) etc.

Descrierea și explicarea fenomenelor trebuie să fie *cantitativă* — condiție fundamentală a științelor exacte — de aceea *matematica* este un instrument indispensabil fizicii. Dar cantitatea se determină numai prin măsurări, de aceea *măsurarea* este un proces fundamental în fizică.

În proprietățile materiei se evidențiază ideea *dezvoltării* și *interconexiunii*, precum și *principiul cauzalității* — bază a prevederii desfășurării fenomenelor.

Dezvoltarea fizicii duce inevitabil la concepția *materialist-dialectică* asupra lumii, anume că aceasta este, prin natura sa, *materială*. Materia, necreată și indestructibilă, este unicul izvor a tot ce există. Conștiința este un produs al dezvoltării istorice a materiei. Conștiința poate reflecta *adecvat* materia, ca atare lumea poate fi *cunoscută*. În acest sens, activitatea practică a oamenilor este hotărîtoare.

2. **Teoria și practica.** Domeniul fenomenelor studiate de fizică s-a lărgit odată cu dezvoltarea practicii social-istorice a omenirii. Obiectul și metodele fizicii au evoluat. De exemplu, în secolul 18 a predominat mecanica, în secolul trecut — electromagnetismul, în secolul nostru — fizica atomică etc.

Practica apare în triplu rol: de izvor al cunoștințelor noastre, de criteriu al adevărului și de scop al cunoașterii.

Cercetarea științifică realizează unitatea dintre teorie și practică, în care rolul practicii este hotărîtor, iar rolul teoriei conducător. Practica fără teorie este oarbă, iar teoria fără practică este sterilă.

Teoria explică un ansamblu de fenomene folosind un număr mic de ipoteze sau legi fundamentale, numite de obicei *principii*, care sînt abstrase din experiență. Din acest sistem de legi fundamentale sînt deduse teoretic toate legile cunoscute sau încă necunoscute, care privesc domeniul cercetat. Orice teorie trebuie neapărat verificată în practică.

Noțiunile și mărimile fizice nu sînt creații subiective arbitrare, ci reflectă realitatea obiectivă, tot mai precis și mai deplin odată cu dezvoltarea fizicii (de exemplu, noțiunile: atom, electron, foton, cîmp etc. sau mărimile: energie cinetică, impuls, lucru mecanic, energie potențială etc.).

Ceea ce am spus despre legile fizicii este valabil și pentru noțiunile și mărimile fizice. Ele se obțin în urma strădaniilor mai multor savanți și chiar generații de savanți. De exemplu, mărimile *impuls* (cantitate de mișcare) și *energie cinetică* („forță vie“ mv^2) au fost introduse de R. Descartes (1644), respectiv G. Leibniz (1686) în urma a nenumărate cercetări și dispute științifice asupra măsurii mișcării mecanice. Caracterul vectorial al impulsului a fost descoperit de elevii lui Descartes, iar coeficientul 1/2 din expresia energiei cinetice (denumire propusă după 1850) a fost introdus de G. Coriolis (la începutul secolului trecut). Abia teoria relativității (1905) a unificat impulsul și energia totală într-un cuadrivector — măsură spațio-temporală a mișcării, legată de omogenitatea spațiului și timpului. Alt exemplu; noțiunea de foton a apărut (1905), după cîteva secole de dezvoltare a opticii (teoria corpusculară a luminii — Newton, teoria ondulatorie — Huygens, Fresnel).

Teoriile fizice actuale nu trebuie absolutizate și eternizate. Ele suferă o dezvoltare *treptată cantitativă* ducînd la un moment dat la crearea *prin salt* a unor teorii *calitativ noi*, care reflectă mai bine realitatea obiectivă, conțin ca un caz particular sau caz limită teoriile precedente și arată totodată domeniul lor de valabilitate *(principiul de corespondență)*. Astfel avem succesiunea: mecanica clasică, teoria restrînsă a relativității, teoria generală a relativității, mecanica cuantică, teoria cîmpurilor și particulelor elementare.

3. **Schematizarea; modele.** Materia este infinită și inepuizabilă în proprietățile sale, în formele sale de organizare și manifestare. Obiectele și fenomenele din natură se găsesc în nesfîrșite interconexiuni și interdependențe. De aceea, în studiul fenomenelor naturii sîntem totdeauna nevoiți să simplificăm, să „schematizăm“ procesele studiate, să creăm „modele“ teoretice ale obiectelor și fenomenelor. Fără schematizarea fenomenelor studiate fizica n-ar putea folosi aparatul matematic, n-ar avea o teorie, n-ar putea conferi experienței un scop determinat, adică ar fi total neputincioasă.

Un model corect trebuie să ia în considerare particularitățile *principale* ale fenomenului (obiectului, procesului) studiat în *problema pusă*, lăsînd la o parte trăsăturile secundare, neesențiale, necaracteristice. Numai astfel se pot stabili legile și relațiile cantitative. Arta fizicianului este de a ști ce să păstreze și ce să *neglijeze* în problema propusă.

Odată cu dezvoltarea fizicii, modelele sau schemele sînt perfecționate cantitativ și chiar schimbate calitativ, pentru a putea exprima mai fidel realitatea obiectivă. Exemple de schematizări și modele: punctul material, solidul rigid, gazul perfect (ideal), gazul Van der Waals, lichidul ideal, atomul lui Bohr, atomul din mecanica cuantică etc.

4. **Unități de măsură.** Măsurarea este procesul fundamental în fizică.

A măsura *o mărime înseamnă a stabili de cîte ori se cuprinde în ea o altă mărime de aceeași natură, bine definită și aleasă prin convenție drept unitate.*

Notăm cu $[A]$ unitatea de măsură pentru mărimea fizică A și cu a valoarea sa numerică, măsurată, atunci:

$$a \overset{\text{def}}{=} A/[A], \quad A = a[A]. \qquad (1)$$

Dacă unitatea $[A]$ se mărește de n ori, valoarea măsurată a se micșorează de n ori.

Orice măsurare fizică este întotdeauna un *proces de interacțiune* între obiectul măsurat și dispozitivul de măsură, proces care *modifică și starea obiectului măsurat* (pentru microparticule această perturbare este *principial* inevitabilă).

Nici o măsurare fizică nu este perfectă; orice măsurare fizică implică totdeauna *erori de măsurare* mai mari sau mai mici. Odată cu dezvoltarea științei și tehnicii se perfecționează și tehnica măsurărilor. Astăzi în multe domenii (de exemplu, în optică și în astronomie) s-a atins o precizie de măsurare extrem de înaltă.

În principiu, pentru fiecare mărime fizică se poate alege o unitate proprie arbitrară, dar atunci legile fizicii s-ar exprima prin formule care ar conține coeficienți numerici *paraziți*, dependenți de unitățile folosite. De aceea, ținînd seama de relațiile care există între diferite mărimi fizice, se alege totdeauna un număr *mic* de mărimi, numite *fundamentale*, și pe baza acestora se construiește un *sistem coerent* de unități, astfel încît în *cele mai frecvente și mai importante formule fizice* să dispară coeficienții paraziți. Celelalte mărimi și unități, legate de cele fundamentale prin legi ale fizicii, se numesc mărimi și unități *derivate*.

Nu există vreo lege a naturii care să ne impună alegerea anumitor mărimi drept mărimi fundamentale sau să ne indice numărul acestora. De aceea, în principiu, s-ar putea alege o *singură* unitate arbitrară pentru o singură mărime considerată fundamentală, toate celelalte fiind astfel derivate, (cu ajutorul constantelor fizice *universale* se poate construi un sistem „absolut" sau „intrinsec" de unităţi bine determinate, în care *toate* mărimile fizice să fie adimensionale).

5. **Unităţi fundamentale.** În practică se aleg totdeauna cel puţin trei unităţi fundamentale. Întrucît materia există şi se mişcă în spaţiu şi timp, care sînt formele sale de existenţă, se aleg în primul rînd *lungimea* şi *durata* ca mărimi fundamentale. La aceste caracteristici externe ale materiei se adaugă cel puţin o mărime caracteristică internă a materiei, cum este *masa* sau *sarcina electrică* (curentul electric).

De exemplu, în sistemul CGS (Gauss) se aleg trei unităţi fundamentale: centimetrul (C), gramul (G) şi secunda (S).

În sistemul internaţional SI (adoptat de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi, Paris, octombrie 1960) se aleg şapte unităţi fundamentale, dintre care numai primele trei (metrul, kilogramul şi secunda) intervin în mecanică.

Metrul a fost definit iniţial (1795) ca $1/10^7$ din sfertul meridianului care trece prin Paris şi pe baza măsurătorilor de atunci (1792) a fost construit un etalon (din platină-iridiu). Ulterior s-a definit metrul ca distanţa (la 0°C) dintre cele două trăsături (repere) de pe etalonul păstrat la Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi de la Sèvres (lîngă Paris). Începînd din 1961 metrul este definit pe baza lungimii de undă λ_{Kr} în vid a radiaţiei portocalii a izotopului kripton 86 (tranziţia între nivelele $2p_{10}$ şi $5d_5$):

$$1\ \text{m} \stackrel{\text{def}}{=} 1\,650\,763{,}73\ \lambda_{Kr}. \tag{2}$$

Secunda a fost definită iniţial ca 1/86400 din ziua solară medie. Cum rotaţia diurnă a Pămîntului nu este uniformă (oscilaţii de $\approx 10^{-5}\%$), ulterior (1956) s-a definit secunda astfel:

$$1\ \text{s} \stackrel{\text{def}}{=} 1/31\,556\,925{,}9747 \text{ din anul tropic la 1.I.1900.} \tag{3}$$

Anul tropic este intervalul de timp dintre două treceri succesive ale Soarelui (în mişcarea sa vizibilă pe ecliptică), prin punctul corespunzător echinocţiului de primăvară (punctul vernal). Anul tropic scade cu $\approx$ 0,5 s pe secol, de aceea s-a precizat anul 1900.

Începînd din 1967 secunda este definită pe baza perioadei T_{Cs} a unei anumite radiaţii emise de atomii de cesiu (^{133}Cs; tranziţia hiperfină 4,0—3,0 a stării fundamentale $^2S_{1/2}$):

$$1\ \text{s} \stackrel{\text{def}}{=} 9\,192\,631\,770\ T_{Cs}. \tag{4}$$

Kilogramul a fost definit iniţial ca masa unui decimetru cub de apă pură la 4°C (cînd are densitatea maximă) şi pe această bază a fost construit un etalon (tot din platină-iridiu), păstrat la Sèvres. Ulterior s-a luat masa acestui etalon drept definiţie a kilogramului.

După măsurătorile actuale, 1 dm³ de apă distilată la 4°C are masa

$$m\,(1\ \text{dm}^3 \text{ apă la } 4°\text{C}) = 0{,}999\,972\ \text{kg} \tag{5}$$

şi deci 1 kg de apă la 4°C are volumul (definiţia iniţială a litrului):

$$V\,(1 \text{ kg apă la } 4°\text{C}) = 1{,}000\,028\ \text{dm}^3 \stackrel{\text{def}}{=} 1\ \text{l} \tag{6}$$

Începînd din 1979 litrul este definit ca fiind *identic* cu 1 dm³ (se propune şi simbolul L pentru a nu confunda pe l cu cifra 1).

Pentru *multiplii şi submultiplii* diferitelor unităţi se folosesc următoarele prefixe:

Multipli		unităţi	Submultipli		unităţi
deca-	da-	10	deci-	d-	10^{-1}
hecto-	h-	10^2	centi-	c-	10^{-2}
kilo-	k-	10^3	mili-	m-	10^{-3}
mega-	M-	10^6	micro-	μ-	10^{-6}
giga-	G-	10^9	nano-	n-	10^{-9}
tera-	T-	10^{12}	pico-	p-	10^{-12}
peta-	P-	10^{15}	femto-	f-	10^{-15}
exa-	E-	10^{18}	atto-	a-	10^{-18}

Se recomandă a nu se folosi simultan două prefixe la aceeaşi unitate şi a nu se folosi prefixe la numitor.

În afara unităţilor SI şi CGS se folosesc pe larg cîteva unităţi tolerate, ca de exemplu, kilogram-forţa (kgf), cal-putere (CP), torrul (sau mm Hg), pe care le vom defini mai tîrziu.

6. **Formule dimensionale.** Dacă notăm cu L, M, T unităţile mărimilor fundamentale lungime, masă şi timp, atunci pentru oricare unitate *mecanică* avem ecuaţia

$$[A] = L^\alpha M^\beta T^\gamma, \tag{7}$$

numită *ecuaţie de dimensiuni* sau *formulă dimensională* a mărimii A faţă de mărimile fundamentale alese. Exponenţii α, β, γ sînt numere întregi pentru mărimi mecanice (pot fi fracţionare în sistemul CGS pentru mărimi nemecanice).

Constantele care intervin în legile fizicii pot fi atît dimensionale cît şi adimensionale (în ultimul caz nu intervin în formula dimensională).

Deoarece nu se pot aduna sau egala decît mărimi fizice de *aceeaşi* natură, fiecare formulă fizică trebuie să fie *omogenă* din punct de vedere *dimensional*, adică ambii membri ai egalităţii, cît şi fiecare termen al unei sume algebrice, trebuie să aibă *aceleaşi dimensiuni fizice*, altfel formula n-are sens. Acesta este *principiul omogenităţii dimensionale a formulelor fizice*.

Observăm că o aceeaşi mărime fizică poate avea dimensiuni diferite în sisteme de unităţi diferite şi două mărimi de natură diferită pot avea într-un sistem dat aceleaşi dimensiuni (de exemplu, lucrul mecanic şi momentul forţei în SI).

Exemple. a) Pentru definirea unităţii de viteză folosim legea mişcării rectilinii *uniforme* $\Delta x/\Delta t$ = const. Cu o unitate arbitrară pentru viteză, ecuaţia mişcării se scrie $x = kvt$, unde k este un coeficient numeric parazit. De exemplu, dacă $[v]$ = viteza sunetului în aer la 0°C, L = 1 m, T = 1 s, atunci k = 331.

Într-un sistem *coerent* de unități punem $k = 1$, atunci

$$v = \frac{x}{t}, [v] = [x]/[t] = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}, \tag{8}$$

de unde

$$[v] = 1 \text{ m/s în SI sau } [v] = 1 \text{ cm/s în CGS.} \tag{8'}$$

Unitatea de viteză este egală cu viteza unui mobil care se deplasează rectiliniu uniform, parcurgînd unitatea de lungime (1 m) în unitatea de timp (1 s).

b) Pentru definirea unității de *accelerație* folosim legea vitezei în mișcarea rectilinii uniform accelerate, scrisă fără coeficient parazit:

$$a = \frac{v - v_0}{t}, [a] = [v]/[t] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}, \tag{9}$$

$$[a] = 1 \text{ m/s}^2 \text{ în SI sau } [a] = 1 \text{ cm/s}^2 \text{ în CGS.} \tag{9'}$$

Unitatea de accelerație este egală cu accelerația unui mobil care se deplasează rectiliniu uniform accelerat și a cărui viteză crește cu o unitate (1 m/s) într-un timp egal cu unitatea (1 s).

7. **Analiza dimensională.** Principiul omogenității dimensionale a formulelor fizicii ne permite să găsim chiar forma unor legi fizice. De exemplu, știind din experiențe că *perioada unui pendul simplu* depinde de lungimea sa l și de accelerația **gravitațională** g, scriem

$$T = \text{const. } l^{\alpha} g^{\beta}, \tag{10}$$

unde α și β sînt **constante. Trecînd** la dimensiuni:

$$T = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta}; \tag{11}$$

prin identificarea **exponenților,** găsim

$$0 = \alpha + \beta, \ 1 = -2\beta, \text{ de unde } \alpha = \frac{1}{2}, \ \beta = -\frac{1}{2}, \tag{12}$$

deci perioada **pendulului simplu:**

$$T = \text{const.} \sqrt{l/g}, \tag{13}$$

unde *const* este o constantă adimensională de ordinul unității (știm că este 2π). **Vom întîlni și alte** exemple de aplicare a analizei dimensionale.

8. **Obiectul mecanicii.** Mecanica studiază mișcarea cea mai simplă a **corpurilor solide, lichide și gazoase,** anume *deplasarea lor în spațiu și timp,* **precum și cauzele care o produc.**

Cinematica **studiază mișcarea** în spațiu și timp, abstracție făcînd de cauzele mișcării. ***Dinamica*** studiază mișcarea corpurilor ținînd seama de forțele care o produc. ***Statica*** studiază echilibrul corpurilor sub acțiunea forțelor.

Mecanica este capitolul de bază al fizicii. Noțiunile și legile mecanicii, — **forță, lucru mecanic, putere,** energie (cinetică, potențială), legea fundamentală $\vec{F} = m\vec{a}$, **principiul** reciprocității forțelor etc. — se aplică în toate celelalte **capitole ale fizicii.** Mecanica este cea dintîi aplicație a matematicii la **studiul cantitativ** și cauzal al fenomenelor naturii.

9. **Observații istorice.** Cunoștințe de **mecanică existau încă în** antichitate, mai ales în problemele de statică. Astfel, ***Arhimede*** (287—212 î.e.n.) a conceput teoria pîrghiei, teoria centrului de greutate ($\approx$ 250 î.e.n.), a pus bazele hidrostaticii, a făcut numeroase invenții tehnice.

Dezvoltarea intensă a mecanicii începe în epoca Renașterii. *Leonardo da Vinci* (1452—1519) dă o teorie a mecanismelor, studiază legile frecării, teoria planului înclinat, definește și aplică momentul forței etc. *Christian Huygens* (1629—1695) descoperă pendulul fizic, introduce noțiunile de forță centrifugă, moment de inerție, centru de oscilație. Pune bazele teoriei ondulatorii în „Tratatul despre lumină".

Inițiatorul dinamicii este *Galileo Galilei* (1564—1642) care a descoperit legea inerției, legile căderii corpurilor, legile pendulului etc. Legile dinamicii și construcția mecanicii teoretice au fost date de *Isaac Newton* (1643—1727) în celebra sa carte „*Philosophiae naturalis Principia mathematica*" (1687). Tot aici se formulează legea atracției universale și se aplică la mecanica cerească.

Mecanica a fost dezvoltată mai departe de *Leonard Euler* (1707—1783), *Jean d'Alembert* (1717—1783), *Joseph Lagrange* (1736—1813), *William Hamilton* (1805—1865) și alții. Stabilitatea sistemelor dinamice a fost studiată de *H. Poincaré* (1854—1912) și *A. M. Liapunov* (1857—1918). Dinamica corpului cu masă variabilă a fost elaborată de *I. V. Meșcerski* (1859—1935) și *T. Levi-Civita* (1873—1941).

La noi în țară contribuții valoroase în mecanica teoretică și aplicată au adus Anghel Saligny, Spiru Haret, Andrei Ioachimescu, Ion Ionescu, Gh. Em. Filipescu, V. Vâlcovici, O. Onicescu (mecanica invariantivă) și alții.

10. **Limitele mecanicii.** Concepțiile mecanicii newtoniene au exercitat o puternică și îndelungată influență asupra întregii fizici. Astfel s-a născut concepția *mecanicistă* asupra lumii, după care toate științele naturii trebuie reduse la mecanică, toate fenomenele naturii explicate prin mișcări mecanice, legile naturii reduse la legi mecanice. Această concepție a fost infirmată la sfîrșitul secolului trecut odată cu imposibilitatea reducerii fenomenelor electromagnetice la mișcări mecanice. S-a încercat atunci crearea unui tablou „electromagnetic" al lumii, adică explicarea tuturor fenomenelor prin cele electromagnetice. Dar nici această explicație nu este posibilă, deoarece forțele nucleare, de exemplu, nu pot fi reduse la forțe electromagnetice. Materia fiind infinită și inepuizabilă, nici o teorie dată nu poate fi universală și ultimă (definitivă).

Domeniul de valabilitate al mecanicii clasice newtoniene este restrîns la corpurile de dimensiuni obișnuite sau mari (macroscopice) și la viteze mici în comparație cu viteza luminii în vid ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Pentru viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii, a fost creată (1905) *mecanica relativistă* (Albert Einstein 1879—1955). Pentru particule de dimensiuni atomice, a fost creată (1925) *mecanica cuantică* (E. Schrödinger, W. Heisenberg, L. De Broglie, P.A.M. Dirac și alții).

Teoria gravitației a lui Newton a fost depășită de teoria generală a relativității a lui A. Einstein (1916).

Teoriile de mai sus sînt *calitativ* deosebite de mecanica newtoniană, pe care o conțin însă ca un caz particular sau ca un caz limită (principiul de corespondență).

PROBLEME

1. Să se scrie ecuaţia mişcării rectilinii uniform variate, dacă unitatea de viteză $[v]$ este egală cu viteza sunetului în aer în condiţii normale, iar unitatea de acceleraţie $[a]$ este egală cu acceleraţia standard (normală) a căderii libere.

R. $x = x_0 + 331\, v_0 t + 4{,}90\, at^2$.

2. Ştiind că presiunea exercitată de o coloană (pătură) de fluid depinde de înălţimea (grosimea) sa h, de densitatea fluidului ρ şi de acceleraţia gravitaţională g să se găsească formula presiunii hidrostatice, folosind analiza dimensională.

R. $p = \text{const.}\ \rho g h$.

3. Se poate construi un sistem de unităţi alegînd o *singură* mărime fundamentală, de exemplu, a) *lungimea* $L = 1$ m sau b) *timpul* $T = 1$ s şi punînd condiţia ca viteza luminii $c = 1$ şi constanta lui Planck $\hbar = 1$. Ce dimensiune vor avea atunci timpul, lungimea, viteza, acceleraţia, masa, forţa, energia?

R. a) $[t] = L = 1$ m = timpul de propagare a luminii pe unitatea de lungime (pe 1 m) $(t = x/c)$, $[v] = 1$ (adimensională) = viteza luminii, $[a] = L^{-1} = 1/\text{m}$; $[m] = L^{-1} = 1/\text{m}$; $[F] = L^{-2} = 1/\text{m}^2$ $[W] = L^{-1} = 1/\text{m}$ etc.

b) $[l] = T = 1$ s = distanţa parcursă de lumină în unitatea de timp (în 1 s), $[v] = 1$ (adimensională) = viteza luminii; $[a] = T^{-1} = 1/\text{s}$, $[m] = T^{-1} = 1/\text{s}$, $[F] = T^{-2} = 1/\text{s}^2$, $[W] = T^{-1} = 1/\text{s}$ etc.

CAPITOLUL 1

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

1.1. RELATIVITATEA MIŞCĂRII. SISTEMELE DE REFERINŢĂ

Deplasarea unui corp are loc în raport cu *alte* corpuri. Fără aceste alte corpuri nu se poate vorbi de deplasare, care este totdeauna *relativă*. O deplasare absolută fără raportare la alte corpuri este lipsită de sens. Relativitatea mişcării este legată de relativitatea poziţiei sau a spaţiului. Nu se poate vorbi de poziţie într-un spaţiu absolut, independent de corpurile aflate în el, ci numai de poziţie *faţă de alte corpuri*.

Corpul care se consideră *prin convenţie* fix şi faţă de care se studiază deplasarea altor corpuri, se numeşte *corp de referinţă*, de exemplu, camera unui laborator, Pămîntul sau Soarele. De corpul de referinţă este legat rigid un *sistem de coordonate* (prescurtat SC), de exemplu, un sistem cartezian ortogonal de 3 axe. Pentru măsurarea timpului trebuie ales un proces periodic, de exemplu oscilaţiile unui pendul. Sistemul de coordonate pentru măsurarea poziţiei şi ceasornicul pentru măsurarea timpului constituie un *sistem de referinţă* sau reper (prescurtat SR).

Mişcarea unui corp arată în general diferit în SR diferite. De exemplu, în SC *propriu*, adică în SC legat rigid de corp, acesta este în repaus (SC propriu prezintă interes, de exemplu, în teoria relativităţii pentru timpul propriu, lungime de repaus, masa de repaus etc.).

În principiu, orice SR este admisibil pentru descrierea mişcării unui corp. Practic însă, se alege totdeauna un SR astfel, încît fenomenul studiat să arate cît mai *simplu* (aşa cum de exemplu, în geometria analitică, în diferite probleme de intersecţii, locuri geometrice, proprietăţi ale figurilor, se aleg axele de coordonate cît mai convenabil). Vom vedea că din punct de vedere *dinamic*, se evidenţiază o clasă foarte importantă de SR, numite *inerţiale*.

1.2. PUNCT MATERIAL. MOBIL

Un corp material este un sistem extrem de complex. O primă simplificare este neglijarea deformării corpului, adică considerarea corpului *rigid* (distanţele mutuale dintre părţile corpului presupuse fixe). Dar chiar şi aşa mişcarea este complexă. De aceea se studiază mai întîi mişcarea unui corp

ale cărui dimensiuni şi rotaţii proprii sînt neglijabile în problema dată. Acesta este *punctul material*, caracterizat numai prin masa sa (vom folosi şi termenul de *particulă*). În cinematică masa nu interesează, de aceea punctul material devine un *mobil*, adică un punct geometric care se mişcă. Un corp oarecare poate fi considerat acum ca un *sistem* de puncte materiale.

Un punct material poate fi un electron, o moleculă, o piatră, un corp cosmic etc. Un acelaşi corp poate fi considerat punct material într-o problemă şi nu, într-o altă problemă. De exemplu, globul terestru se poate aproxima cu un punct material în mişcarea sa de revoluţie în jurul Soarelui, dar nu în rotaţia proprie diurnă.

În mişcarea de *translaţie*, toate punctele corpului se mişcă identic, de aceea mişcarea unui singur punct al corpului caracterizează pe deplin mişcarea întregului corp, indiferent de dimensiunile acestuia, deci putem aplica modelul punctului material.

1.3. TRAIECTORIA. ECUAŢIILE MIŞCĂRII

Se numeşte *traiectorie* linia sau curba descrisă de mobil în timpul mişcării sale, adică locul geometric al punctelor prin care trece mobilul.

Traiectoria poate fi rectilinie sau curbilinie (în particular, circulară). Forma traiectoriei depinde de SC folosit.

Poziţia mobilului la un moment dat t este determinată de coordonatele sale, de exemplu, x, y, z într-un SC ortogonal (fig. 1.1) sau altfel, de vec-

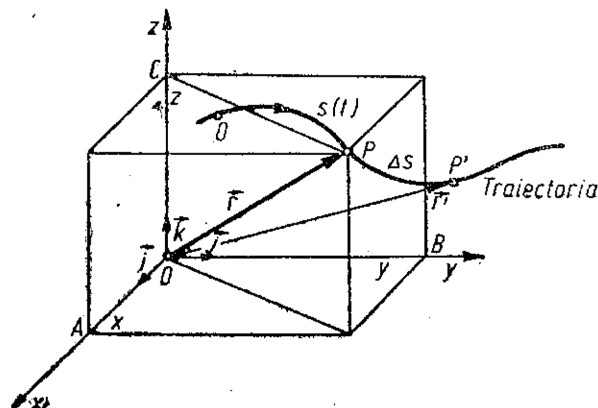


Fig. 1.1

torul de poziţie $\vec{r}$, ale cărui proiecţii (componente) pe axele $Oxyz$ sînt tocmai coordonatele x, y, z:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2;\qquad (1.1)$$

$$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k} \text{ — versorii axelor},\ |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

În figura 1.1 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ este diagonala spaţială a paralelipipedului, punctul P se proiectează ortogonal pe axe după diagonalele feţelor în punctele A, B, C.

Conform principiului *perfectei localizări*, se presupune că punctul material descrie o traiectorie continuă bine *determinată*, că în fiecare moment ocupă pe traiectorie o poziţie bine determinată şi că această poziţie variază în timp în mod *continuu*. Aceasta înseamnă că coordonatele punctului material x, y, z sînt funcţii finite, uniforme şi continue de timp:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),\qquad (1.2)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} = \vec{r}(t).\qquad (1.2')$$

Mai mult, vom presupune că funcţiile (1.2) sînt de două ori derivabile, ceea ce este în general adevărat (eventualele singularităţi, de exemplu, în teoria ciocnirilor, trebuie analizate special).

Cele trei ecuaţii (1.2) se numesc *ecuaţiile cinematice ale mişcării* şi reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei, în care parametrul este timpul. Prin eliminarea timpului din (1.2) se obţin ecuaţiile traiectoriei sub forma:

$$F_1(x, y, z) = 0,\ F_2(x, y, z) = 0.\qquad (1.3)$$

Fiecare ecuaţie de aici reprezintă o suprafaţă, iar ansamblul lor reprezintă curba de intersecţie a celor două suprafeţe.

Mişcarea poate fi descrisă, de asemenea, cu ajutorul traiectoriei (1.3) şi a legii de mişcare pe această traiectorie, numită şi *legea spaţiului* (deci tot 3 ecuaţii):

$$s = f(t),\qquad (1.3')$$

unde s este *coordonata curbilinie* a mobilului, adică lungimea arcului de traiectorie măsurată de la un punct origine O de pe traiectorie, ţinînd seama de sensul pozitiv ales pe curbă. Presupunem funcţia (1.3') de două ori derivabilă.

1.4. VITEZA PE TRAIECTORIE

Fie P şi P' poziţiile mobilului în momentele t şi t' (fig. 1.1). Dacă s, s' sînt coordonatele curbilinii ale punctelor P, P', atunci $\Delta s = s' - s =$ arc PP' reprezintă *deplasarea curbilinie* a mobilului în intervalul de timp $\Delta t = t' - t$. Deplasarea curbilinie Δs poate fi pozitivă sau negativă şi ea nu coincide în general cu *distanţa parcursă* de mobil în intervalul Δt (de exemplu, dacă în timpul Δt mobilul revine în P, rezultă $\Delta s = 0$, în timp ce distanţa parcursă este diferită de zero).

Viteza medie pe o porţiune de traiectorie PP' de lungime Δs, parcursă în intervalul de timp Δt, se defineşte prin raportul

$$\langle v\rangle = \Delta s/\Delta t.\qquad (1.4)$$

Viteza *instantanee* sau momentană în punctul P la momentul t se obține trecînd la limita $P' \to P$:

$$v \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t) = \dot{s}, \tag{1.5}$$

adică se obține prin *derivarea coordonatei* curbilinii s în raport cu timpul. Dacă $v > 0$, mobilul se mișcă în sensul ales pozitiv pe traiectorie. Derivata (1.5) există în virtutea ipotezei derivabilității lui (1.3′).

Exemplu. Dacă pe o traiectorie oarecare se parcurg distanțe egale în timpuri egale, mișcarea se numește *uniformă pe traiectorie* sau *curbilinie uniformă* (de exemplu, circulară uniformă). În acest caz deplasarea curbilinie Δs coincide cu distanța parcursă și viteza pe traiectorie este constantă:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{const} = v = \frac{ds}{dt}; \quad \int ds = \int v dt, \ s(t) = s_0 + vt, \tag{1.6}$$

unde $s_0 = s(0)$ este coordonata inițială (la $t = 0$) (fig. 1.2). Mai general, integrarea din (1.6) dă

$$s = s_0 + v(t - t_0), \tag{1.6′}$$

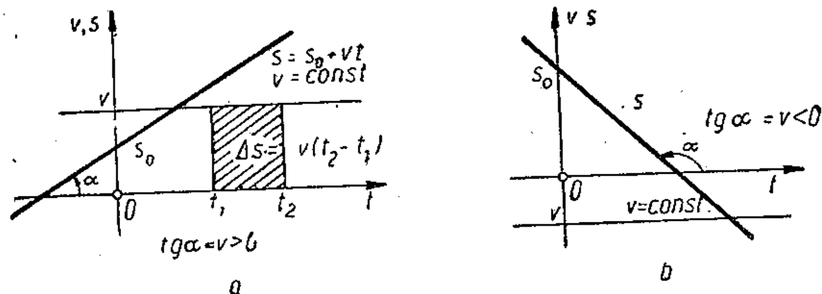


Fig. 1.2

unde s_0 este coordonata la momentul t_0. Prin urmare, coordonata s este o funcție *liniară* de timp și se reprezintă grafic printr-o linie dreaptă. Panta dreptei reprezintă viteza.

Viteza medie $\langle v \rangle = \Delta s / \Delta t$, definită mai înainte, coincide cu viteza constantă a unui mobil fictiv care ar parcurge *uniform* aceeași deplasare Δs în același interval de timp Δt.

1.5. VECTORUL VITEZĂ

Cunoașterea mișcării pe traiectorie implică cunoașterea direcției și sensului mișcării mobilului. Direcția este dată de tangenta la traiectorie, iar sensul este dat de creșterea sau descreșterea arcului s cînd timpul t crește (fig. 1.3).

Vectorul deplasare *este prin definiție* $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ *și coincide ca direcție și lungime cu secanta* $\overline{PP'}$.

Vectorul viteză medie $\langle \vec{v} \rangle$ se definește prin raportul:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

și are direcția vectorului deplasare, adică a secantei $\overline{PP'}$.

La limita $P' \to P$ $(\Delta t \to 0)$ obținem vectorul viteză *instantanee* sau momentană:

$$\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}. \tag{1.8}$$

Vectorul viteză este derivata vectorului de poziție în raport cu timpul.

Cînd trecem la limită, secanta PP' se rotește în jurul lui P și devine tangentă la traiectorie. Prin urmare *vectorul viteză momentană* $\vec{v}$ are *direcția tangentei la traiectorie (este tangent la traiectorie)* (G. Roberval 1635).

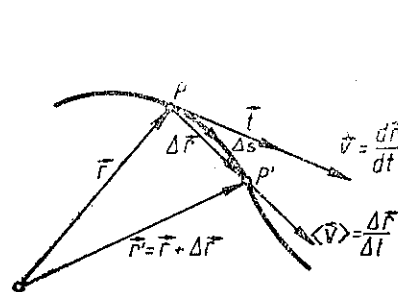


Fig. 1.3

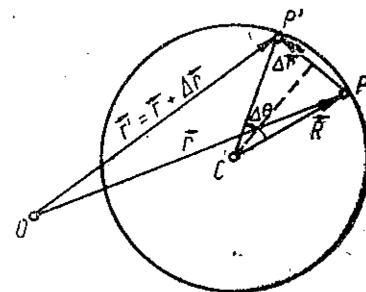


Fig. 1.4

Deoarece *la limită* lungimea arcului de curbă ds coincide cu lungimea coardei subîntinse $|d\vec{r}|$, de exemplu, la cercul de rază R (fig. 1.4):

$$\frac{|d\vec{r}|}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{2R \sin(\Delta\theta/2)}{R\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1,$$

unde $\Delta\theta$ este unghiul la centru (în radiani) al coardei de lungime $2R\sin(\Delta\theta/2)$ care subîntinde arcul de lungime $R\Delta\theta$, rezultă că derivata $d\vec{r}/ds$, avînd modulul 1, trebuie să fie un versor, și anume în direcția tangentei la curbă și în sensul creșterii coordonatei s:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1, \ \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}, \ |\vec{t}| = 1, \tag{1.9}$$

unde $\vec{t}$ *este versorul tangentei* (în sensul creșterii arcului s) (a nu se confunda versorul tangentei $\vec{t}$ cu timpul t). Prin urmare,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{t}\frac{ds}{dt} = v\vec{t}, \tag{1.10}$$

vectorul viteză este tangent la traiectorie și îndreptat în sensul mișcării.

Observație. De obicei notăm modulul unui vector cu literă fără săgeată: $|\vec{a}| = a$. În (1.10) însă, $v = \dot{s} = ds/dt$ *nu* înseamnă modulul $|\vec{v}|$, ci $\pm|\vec{v}|$ ($\pm$ după sensul mișcării), și anume, viteza pe traiectorie s este *componenta* vectorului viteză $\vec{v}$ pe direcția tangentei la traiectorie $\vec{t}$:

$$\vec{v} = v\vec{t}, \text{ unde } v = \dot{s} = ds/dt = \pm|\vec{v}|. \tag{1.11}$$

În general, din context se înțelege dacă v este modulul vitezei sau componenta vectorului viteză $\vec{v}$ pe direcția tangentei la traiectorie (viteza pe traiectorie).

Pentru componentele vitezei într-un SC cartezian *ortogonal* rezultă:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \tag{1.12}$$

$$= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k},$$

$$v_x = \dot{x} = f_1'(t),\ v_y = \dot{y} = f_2'(t),\ v_z = \dot{z} = f_3'(t), \tag{1.13}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2 + \dot{f}_3^2.$$

Componenta vitezei pe o axă este egală cu derivata în raport cu timpul a coordonatei respective (în SC cartezian ortogonal).

Derivatele există în virtutea ipotezei derivabilității funcțiilor (1.2) (observăm că, continuitatea funcțiilor nu implică derivabilitatea; există funcții continue pe un interval și nicăieri derivabile).

Legea de mișcare pe traiectorie (1.3') $s = f(t)$ se obține din ecuațiile cinematice ale mișcării (1.2) astfel:

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt},\ ds = v dt = \pm\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\, dt = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt,$$

de unde

$$s = s_0 \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = s_0 \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2}\, dt. \tag{1.14}$$

În mișcarea rectilinie direcția vectorului viteză $\vec{v}$ este fixă.

Observație. Spre deosebire de mecanica clasică, în mecanica *cuantică* particulele *atomice* nu au o traiectorie bine definită și nu au *simultan* poziția și viteza bine determinate (conform relațiilor de nedeterminare ale lui Heisenberg).

Exemplu. Fie mișcarea *rectilinie uniformă* (pe scurt, *uniformă*), $\vec{v} =$ const. Atunci

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ d\vec{r} = \vec{v}dt,\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0). \tag{1.15}$$

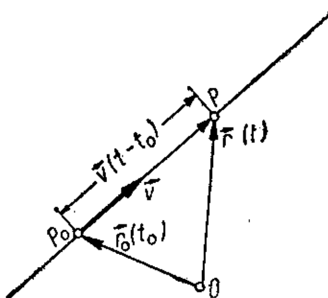


Fig. 1.5

Aceasta este forma vectorială a legii de mișcare rectilinie uniformă (fig. 1.5). Ecuația (1.15) este totodată ecuația vectorială, parametrică (în t), a traiectoriei — linie dreaptă în spațiu. Pe componente, proiectînd ecuația vectorială pe axe într-un SC cartezian, avem:

$$x = x_0 + v_x(t - t_0),\ y = y_0 + v_y(t - t_0), \tag{1.16}$$
$$z = z_0 + v_z(t - t_0),$$

care reprezintă ecuațiile cinematice ale mișcării uniforme și în același timp ecuațiile parametrice ale traiectoriei — liniei drepte în spațiu.

Alegînd axa Ox chiar pe dreapta mișcării avem o singură ecuație:

$$x = x_0 + v(t - t_0),\ \left(v = \frac{dx}{dt}\right). \tag{1.16'}$$

Aici v nu este modulul vitezei, ci o mărime algebrică (viteza pe traiectorie).

1.6. ACCELERAȚIA

Într-o mișcare curbilinie oarecare viteza $\vec{v}$ variază și ca mărime și ca direcție. O măsură a acestei variații este *vectorul accelerație*. Analog vectorului viteză, definim accelerațiile medie și instantanee (momentană):

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},\ \vec{a} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \dot{\vec{v}}, \tag{1.17}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}''(t) = \ddot{\vec{r}}, \tag{1.18}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}),$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = f_1''(t),\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = f_2''(t),\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} = f_3''(t); \tag{1.19}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = f_1''^2 + f_2''^2 + f_3''^2,$$

adică *accelerația $\vec{a}$ este derivata întîia a vitezei $\vec{v}$ sau derivata a doua a vectorului de poziție $\vec{r}$, în raport cu timpul t.*

Componentele accelerației sînt egale cu derivatele componentelor respective ale vitezei în raport cu timpul, sau cu derivatele de ordinul II ale coordonatelor respective (într-un SC cartezian ortogonal).

În timp ce viteza este totdeauna tangentă la traiectorie și are sensul mișcării, *accelerația în mișcarea curbilinie este totdeauna orientată spre „interiorul" traiectoriei, adică spre partea concavă a traiectoriei*, partea spre care se rotește vectorul vitezei tangent la traiectorie (fig. 1.6).

Ducînd vectorul viteză $\vec{v}$ dintr-un punct fix O, vîrful său Q va descrie în timpul mișcării mobilului o curbă numită *hodograf* (W. Hamilton 1846) (fig. 1.7). Accelerația medie are direcția secantei $\overline{QQ'}$ la hodograf, în timp

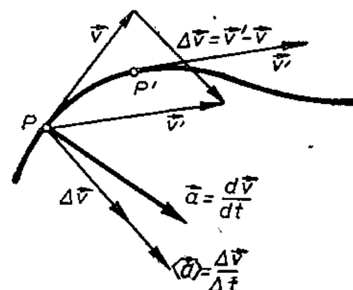


Fig. 1.6

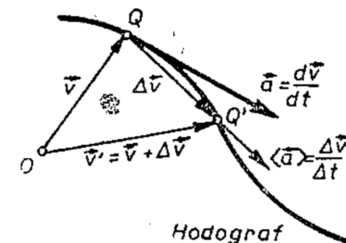


Fig. 1.7

ce accelerația momentană este tangentă la hodograf. Viteza de deplasare a punctului reprezentativ Q pe hodograful vitezei coincide cu accelerația mobilului (traiectoria mobilului este „hodograful" vectorului de poziție $\vec{r}$).

Observație. Conform formulelor (1.2), (1.12—13) și (1.19) mișcarea unui punct material în spațiu se descompune în 3 mișcări rectilinii ale proiecțiilor sale pe cele 3 axe ortogonale de coordonate (MacLaurin 1742). În fiecare moment viteza și accelerația mobilului se compun (vectorial) din vitezele și accelerațiile acestor proiecții (H. Resal 1862).

Viteza și accelerația există, funcțiile (1.2) fiind presupuse de două ori derivabile.

1.7. CURBURA ŞI RAZA DE CURBURĂ

În cazul unui cerc, raza să R este totodată raza de curbură. Curbura se defineşte ca inversul razei de curbură: $C = 1/R$. Cercul are deci în toate punctele sale aceeaşi curbură $C = 1/R$.

Trei puncte vecine necoliniare pe o curbă oarecare definesc un cerc şi un plan conţinînd acest cerc (fig. 1.8). Raza acestui cerc dă curbura „medie"

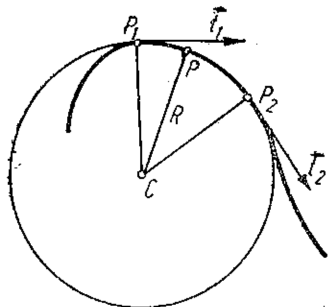


Fig. 1.8

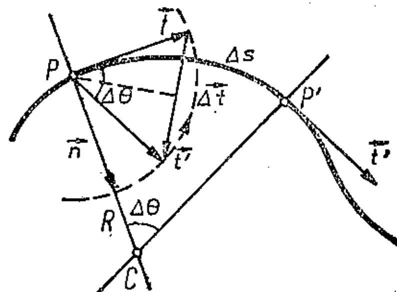


Fig. 1.9

a curbei pe porţiunea P_1PP_2. Cercul limită, obţinut cînd P_1 şi P_2 tind către P, se numeşte *cerc de curbură* sau *cerc osculator* al curbei în punctul P; el are trei puncte comune confundate cu curba (în P); raza sa dă raza de curbură şi centrul său dă centrul de curbură al curbei în punctul P. Planul limită se numeşte *plan osculator*, el conţine cercul de curbură. Pentru o linie dreaptă $R \to \infty$ şi $C = 0$ (planul osculator devine nedeterminat).

O altă construcţie echivalentă este următoarea (fig. 1.9): ducem în două puncte vecine P, P' tangentele $\vec{t}$, $\vec{t}'$ şi planele normale (perpendiculare pe tangente). Tangentele $\vec{t}$, $\vec{t}'$ duse în P definesc un plan, iar planele normale se taie după o dreaptă perpendiculară pe acest plan. La limită, cînd $P' \to P$, planul tangentelor devine plan osculator al curbei în P, iar dreapta de intersecţie a planelor normale devine dreaptă *polară*, care trece prin centrul de curbură şi este perpendiculară pe planul osculator. Această construcţie generalizează pentru curbe oarecare construcţia similară pentru cerc (dacă planul figurii 1.9 este planul tangentelor duse în P, atunci pentru o curbă strîmbă P' va fi deplasat în spatele sau în faţa figurii).

Prin definiţie, *curbura*

$$C \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}, [C] = \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \; R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\theta}, \tag{1.20}$$

unde $\Delta\theta$ este unghiul (în radiani) dintre două tangente vecine, duse în două puncte vecine la distanţa curbilinie Δs între ele.

Din construcţia figurii 1.9 se vede că $\Delta s/\Delta\theta$ este raza unui cerc care aproximează arcul Δs, prin urmare la limită $\Delta s/\Delta\theta$ va da raza cercului de curbură (osculator).

Curbura $C = d\theta/ds$ măsoară gradul de abatere a curbei de la o linie dreaptă: de la tangenta sa în punctul considerat. Curbura este egală cu unghiul (în rad) dintre două tangente la curbă în două puncte vecine, raportat la lungimea arcului de curbă dintre ele, sau altfel, curbura este egală cu unghiul cu care se roteşte tangenta la curbă, atunci cînd ne deplasăm pe curbă cu o unitate de lungime. În sfîrşit, curbura este egală cu „viteza" de rotaţie a tangentei în raport cu deplasarea pe curbă. Prin urmare, curbura (gradul de abatere de la o linie dreaptă) într-un punct dat al curbei este mare, dacă este mare unghiul de rotire a tangentei pe unitatea de lungime a curbei, în vecinătatea acelui punct.

Normala la curbă (adică perpendiculara pe tangentă), conţinută în planul osculator, se numeşte *normala principală* (versorul $\vec{n}$ îndreptat spre centrul de curbură). Normala la curbă, perpendiculară pe planul osculator, se numeşte *binormală*; versorul ei se alege conform produsului vectorial:

$$\vec{b} \overset{\text{def}}{=} \vec{t} \times \vec{n} \tag{1.21}$$

(în fig. 1.9 de la cititor spre figură). Astfel, în fiecare punct al curbei avem un triedru ortogonal $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$, numit triedru *principal* sau *natural* (sau triedru Frénet).

Din figura 1.9 se vede că

$$\left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta\theta}\right| = \frac{2|\vec{t}|\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \to 1 \text{ cînd } \Delta\theta \to 0, \; (|\vec{t}| = 1);$$

prin urmare derivata $d\vec{t}/d\theta$, avînd modulul 1, este un versor. Cînd $P' \to P$ pe curbă ($\Delta\theta \to 0$), versorul $\vec{t}'$ se roteşte în jurul lui P, astfel încît $\Delta\vec{t}$ devine perpendicular pe $\vec{t}$ şi orientat spre centrul de curbură, după versorul $\vec{n}$.

Prin urmare, în modul, direcţie şi sens:

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{t}}{\Delta\theta} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} = \vec{n},$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = C\vec{n} = \frac{\vec{n}}{R}. \tag{1.22}$$

Aceasta este *prima formulă a lui Frénet*.

Observaţie. Un vector variabil $\vec{u}$, dar *de modul constant*, de exemplu, un versor, nu se poate decît roti (modulul fiind constant). Deci ducîndu-l dintr-un punct fix, vîrful său descrie o curbă situată pe o sferă (de rază egală cu modulul vectorului fig. 1.10; pentru versorul $\vec{t}$ sfera este desenată parţial punctată în fig. 1.9). Variaţia vectorului de modul constant va fi egală cu coarda (secantă) la această sferă:

$$|\Delta\vec{u}| = 2|\vec{u}|\sin\frac{\Delta\theta}{2}. \tag{1.23}$$

La limită, cînd $\Delta\theta \to 0$, $\Delta\vec{u}$ devine $d\vec{u}$ tangent la sferă, deci *perpendicular* pe vector. Aceasta rezultă şi din condiţia:

$$\vec{u}\,\vec{u} = \text{const} \to \vec{u}d\vec{u} = 0, \text{ deci } d\vec{u} \perp \vec{u}. \tag{1.23'}$$

Din (1.23) rezultă la limită:

$$|d\vec{u}| = |\vec{u}|d\theta, \; \left|\frac{d\vec{u}}{d\theta}\right| = |\vec{u}|, \text{ dacă } |\vec{u}| = \text{const}. \tag{1.24}$$

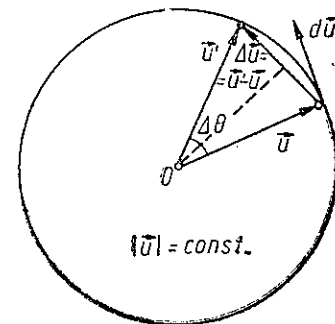


Fig. 1.10

De aici rezultă, analog demonstrației date pentru versorul $\vec{t}$, că *diferențiala oricărui versor este egală în modul cu unghiul de rotație a versorului* ($|d\vec{t}| = d\theta$), iar ca direcție este perpendiculară pe versor, adică *derivata unui versor în raport cu unghiul de rotație este un versor perpendicular pe versorul inițial* $\left(\frac{d\vec{t}}{d\theta} = \vec{n} \perp \vec{t}\right)$.

1.8. ACCELERAȚIILE TANGENȚIALĂ ȘI NORMALĂ

Derivăm (1.10), ținînd seama de (1.22):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (v\vec{t})^{\cdot} = \dot{v}\vec{t} + v\dot{\vec{t}} = \dot{v}\vec{t} + v\frac{d\vec{t}}{ds}\dot{s} =$$

$$= \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \tag{1.25}$$

$$a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_b \equiv 0. \tag{1.26}$$

Prin urmare, *în fiecare moment accelerația $\vec{a}$ se află în planul osculator al traiectoriei* și se descompune într-o componentă *tangențială* a_t de-a lungul tangentei la traiectorie, deci paralelă cu viteza $\vec{v}$ (dacă v crește, atunci $a_t > 0$), și o componentă *normală* pe traiectorie a_n, îndreptată spre centrul de curbură (numită și accelerație centripetă).

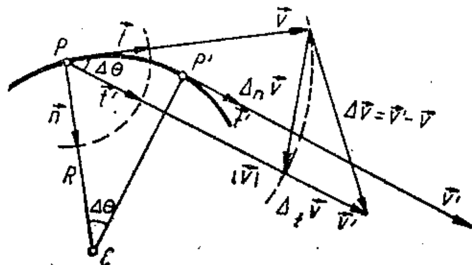


Fig. 1.11

Componenta a_t se datorește variației modulului vitezei, iar componenta a_n, se datorește variației direcției vitezei.

O variantă a demonstrației rezultă din figura 1.11; $\Delta_t\vec{v}$ provine din variația modulului vitezei (se anulează dacă $v' = v$), iar $\Delta_n\vec{v}$ provine din variația direcției vitezei (se anulează dacă $\vec{v}$ nu se rotește):

$$\left|\frac{\Delta_t\vec{v}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{v' - v}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| \to \left|\frac{dv}{dt}\right|, \tag{1.27}$$

$$\left|\frac{\Delta_n\vec{v}}{\Delta t}\right| = \frac{2v\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta t} = v\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \to v\frac{d\theta}{dt}.$$

La limită cînd $P' \to P(\Delta\theta \to 0)$, $\Delta_t\vec{v}$ devine paralel cu $\vec{v}$ (sau cu $\vec{t}$), iar $\Delta_n\vec{v}$ devine perpendicular pe $\vec{v}$ (sau pe $\vec{t}$) deci paralel cu $\vec{n}$. Prin urmare, în modul, direcție și sens:

$$\frac{d_t\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_t\vec{v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}\vec{t}; \quad \frac{d_n\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_n\vec{v}}{\Delta t} = v\frac{d\theta}{dt}\vec{n} \tag{1.28}$$

și deci

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\Delta_t\vec{v} + \Delta_n\vec{v}) = \frac{d_t\vec{v}}{dt} + \frac{d_n\vec{v}}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{t} + v\frac{d\theta}{dt}\vec{n} = \dot{v}\vec{t} + v\frac{d\theta}{ds}\dot{s}\vec{n} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}. \tag{1.29}$$

O mișcare curbilinie este totdeauna accelerată din cauza variației *direcției* vitezei ($a_n = v^2/R \neq 0$). Dacă $a_t = \dot{v} = 0$ ($v = \text{const}$), mișcarea este *uniformă pe traiectorie* sau *curbilinie uniformă* și accelerația se reduce la accelerația normală a_n. În mișcarea rectilinie $a_n \equiv 0$ ($R \to \infty$).

Aplicații

a) Dacă viteza pe traiectorie v variază cu cantități egale în timpuri egale, mișcarea se numește *uniform variată pe traiectorie sau curbilinie uniform variată* (de exemplu, circulară uniform variată) și accelerația a_t este constantă:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const} = \frac{dv}{dt} = a_t, \int dv = \int a_t dt, \quad v = v_0 + a_t(t - t_0), \tag{1.30}$$

$$\int ds = \int v dt = \int(v_0 + a_t(t - t_0))dt = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_t(t - t_0)^2;$$

sau mai simplu (dacă condițiile inițiale, poziția s_0 și viteza v_0, se refera la momentul $t_0 = 0$):

$$v = v_0 + a_t t, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2. \tag{1.30'}$$

Eliminînd timpul t rezultă *formula generală a lui Galilei*:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0), \tag{1.31}$$

și eliminînd accelerația, rezultă

$$s = s_0 + \frac{v_0 + v}{2}(t - t_0) = s_0 + \langle v\rangle(t - t_0), \quad \langle v\rangle = \frac{v_0 + v}{2}. \tag{1.32}$$

În mișcarea uniform variată *rectilinie* (Galilei 1638): $R \to \infty$ și $a_n = 0$, astfel încît în (1.30—31) a_t coincide cu a.

Grafic, viteza se reprezintă (în funcție de timp) printr-o linie dreaptă. Panta dreptei reprezintă accelerația tangențială, iar aria mărginită de dreaptă reprezintă deplasarea curbilinie Δs. Coordonata s se reprezintă printr-o parabolă (fig. 1.12). Panta tangentei la parabolă reprezintă viteza. Viteza se anulează în dreptul minimului ($a_t > 0$) sau maximului ($a_t < 0$) parabolei (deoarece $v = \dot{s}$).

În cazul $a_t < 0$, ($v_0 > 0$), mişcarea este uniform încetinită sau frînată (întîrziată) pe traiectorie şi există un moment t_m cînd corpul se opreşte ($v = 0$);

$$v = v_0 + a_t t = 0 \to t_m = -\frac{v_0}{a_t} = \left|\frac{v_0}{a_t}\right|, \; s_m = s_0 - \frac{v_0^2}{2a_t} = s_0 + \frac{v_0^2}{2|a_t|}. \quad (1.33)$$

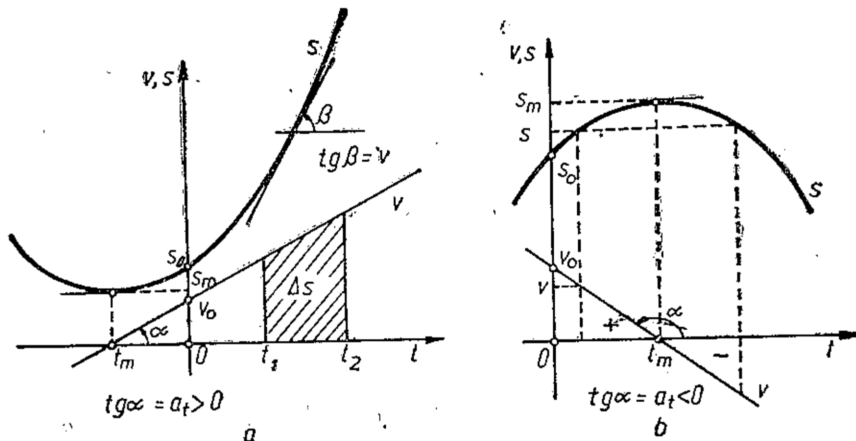


Fig. 1.12

Atingînd distanţa maximă s_m, corpul se opreşte şi apoi se întoarce accelerat, parcurgînd aceleaşi puncte cu viteze de acelaşi modul, dar de semn schimbat.

În cazul $a_t > 0$ ($v_0 > 0$), mişcarea este uniform accelerată, dar dacă prelungim mişcarea în trecut ($t < 0$), vom găsi şi o etapă de mişcare încetinită (fig. 1.12, *a*).

În cazul mişcării rectilinii, bineînţeles a_t coincide cu a.

Din (1.30) rezultă că *unitatea de acceleraţie* este egală cu acceleraţia unui mobil în mişcare uniform variată, a cărui viteză creşte cu o unitate (1 m/s) într-un interval de timp egal cu unitatea (1 s):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \to [a] = [v]/[t] = \mathrm{L \cdot T^{-2}} = 1 \ \mathrm{m/s^2} \text{ în SI.} \quad (1.34)$$

b) Mai general, fie o mişcare cu *vectorul acceleraţiei constant* $\vec{a} = \text{const}$ (mişcare uniform variată generală). Atunci

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \to d\vec{v} = \vec{a}dt \to \vec{v} = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \vec{v_0} + \vec{a}(t - t_0). \quad (1.35)$$

Aceasta reprezintă de fapt ecuaţia vectorială, parametrică, a hodografului vitezei — o linie dreaptă (fig. 1.13). Mai departe,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \; d\vec{r} = \vec{v}dt, \; \vec{r} = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} [\vec{v_0} + \vec{a}(t - t_0)]dt =$$
$$= \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2. \quad (1.36)$$

Dacă $\vec{v_0}$ este *coliniar* cu $\vec{a}$, obţinem o mişcare *rectilinie* uniform variată. Altfel mişcarea este plană în planul definit de vectorii $\vec{v_0}$ şi $\vec{a}$ şi ecuaţia (1.36) reprezintă ecuaţia vectorială, parametrică, a traiectoriei, care este o *parabolă* în acest plan, cu axa de simetrie paralelă cu $\vec{a}$, şi cu concavi-

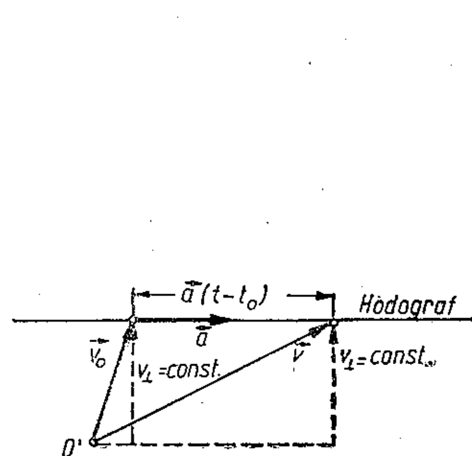


Fig. 1.13

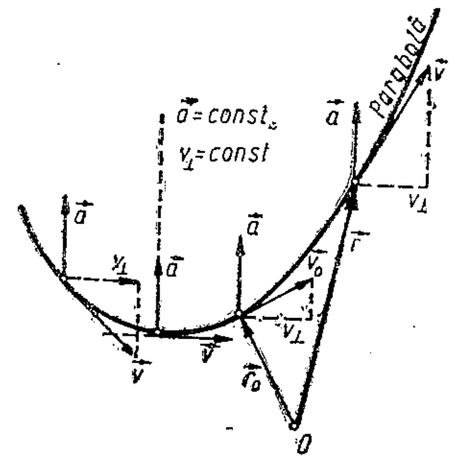


Fig. 1.14

tatea orientată, bineînţeles, în sensul lui $\vec{a}$ (fig. 1.14). Dacă alegem axele de coordonate Oxy în planul mişcării cu axa Oy paralelă cu $\vec{a}$, atunci pe componente (proiectăm ecuaţiile vectoriale pe axe):

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + a(t - t_0) \\ (v_z \equiv 0) \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ (z \equiv 0) \end{cases} \quad (1.37)$$

$$(a_x \equiv 0, \; a_y = a, \; a_z \equiv 0),$$

de unde, eliminînd timpul, rezultă ecuaţia traiectoriei:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{a}{v_{0x}^2}(x - x_0)^2, \quad (1.37')$$

care este o *parabolă* (fiind de forma $y = Ax^2 + Bx + C$).

1.9. MIŞCAREA ÎN CÎMPUL GRAVITAŢIONAL (în vid)

Experienţa cu tubul lui Newton — tub vidat, suficient de lung, conţinînd diferite obiecte — arată că *toate corpurile cad în vid cu aceeaşi acceleraţie g*, independentă de masa, natura, dimensiunile sau forma corpului. Vectorul acceleraţiei $\vec{g}$ este orientat vertical spre centrul Pămîntului. Acceleraţia gravitaţională g variază cu altitudinea, şi chiar la nivelul mării,

variază uşor cu latitudinea, datorită turtirii Pămîntului la Poli şi rotaţiei diurne : la ecuator $g_E = 9{,}7805$ m/s², la pol $g_P = 9{,}8322$ m/s², la paralela 45° : $g_0 = 9{,}80616$ m/s².

În aer, pe lîngă greutatea corpului $G = mg$, acţionează şi forţa de rezistenţă a aerului F_r. Pentru corpuri mici şi grele $G \gg F_r$ şi obţinem rezultate apropiate de mişcarea în vid.

1.9.1. MIŞCAREA PE PARABOLĂ

Alegînd axele ca în figura 1.15 (viteza iniţială $\vec{v}_0$ în planul Oxy) avem :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0,\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g,\ (a_z \equiv 0), \tag{1.38}$$

de unde prin integrare :

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x},\ \frac{dy}{dt} = v_y = v_{0y} - gt,\ (v_z = v_{0z} \equiv 0) \tag{1.39}$$

şi printr-o nouă integrare :

$$x = x_0 + v_{0x}t,\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2,\ (z = z_0 \equiv 0), \tag{1.40}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0,\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0.$$

Mişcarea este *plană*. Constantele de integrare au semnificaţia de viteză iniţială şi poziţie iniţială (la $t = 0$). Pe orizontală proiecţia P' se mişcă uniform cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$, iar pe verticală proiecţia P'' se mişcă uniform variat cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0$ şi acceleraţia $a_y = -g$.

Eliminînd timpul din (1.40) se obţine ecuaţia traiectoriei, a *parabolei* :

$$y - y_0 = (x - x_0)\operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}. \tag{1.41}$$

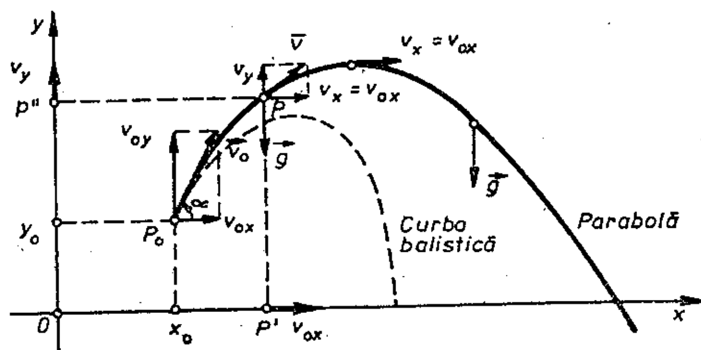


Fig. 1.15

Alegînd pentru simplificare $x_0 = y_0 = 0$, să calculăm înălţimea maximă y_m a traiectoriei şi distanţa maximă b pe orizontală (bătaia). Avem pentru coordonatele maximului traiectoriei :

$$y'(x) = 0 \to x_m = \frac{1}{2g}v_0^2 \sin 2\alpha_0,\ y_m = \frac{1}{2g}v_0^2\sin^2\alpha_0 \tag{1.42}$$

sau altfel

$$v_y = 0 \to t_m = \frac{1}{g}v_0 \sin\alpha_0, \tag{1.43}$$

care introdus în (1.40) dă x_m, y_m.

Din simetria parabolei sau din condiţia $y = 0$ rezultă *bătaia* b :

$$b = 2x_m = \frac{1}{g}v_0^2 \sin 2\alpha_0 \text{ după } T = 2t_m = \frac{2}{g}v_0\sin\alpha_0. \tag{1.44}$$

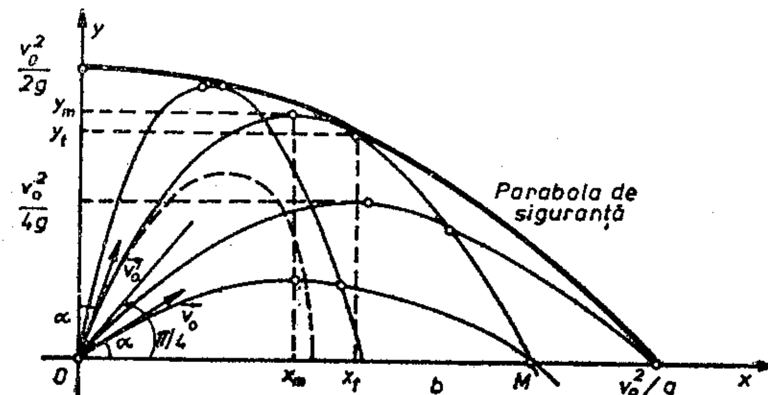


Fig. 1.16

Există încă o parabolă care atinge ţinta M (fig. 1.16), sub unghiul complementar $\pi/2 - \alpha_0$:

$$b = \frac{1}{g}v_0^2 \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) = \frac{1}{g}v_0^2 \sin 2\alpha_0.$$

Pentru v_0 dat, bătaia este maximă dacă $\alpha_0 = 45°$:

$$b_{max} = v_0^2/g. \tag{1.45}$$

Dacă $\alpha_0 = \pi/2$, obţinem cazul aruncării în sus pe verticală.

Timpul de urcare (egal cu timpul de coborîre) şi înălţimea maximă sînt în acest caz :

$$t_m = \frac{v_0}{g},\ h_m = \frac{v_0^2}{2g}, \tag{1.46}$$

care se pot obţine şi din (1.33) punînd $a_t = -g$.

Traiectoria reală, ţinînd seama de rezistenţa aerului, nu mai este o parabolă, ci aşa-numita *curbă balistică* (fig. 1.15), sensibilă la forma corpului.

Observaţie. Mişcarea în cîmpul gravitaţional terestru în vid ($\vec{g} = \text{const}$) este o mişcare uniform variată generală şi conform lui (1.36) se scrie vectorial astfel :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t,\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2. \tag{1.47}$$

Proiectînd aceste ecuaţii pe axele unui SC ortogonal convenabil, regăsim ecuaţiile (1.39—40)

1.9.2. PARABOLA DE SIGURANŢĂ

Pentru a atinge un punct (x, y) dat, unghiul α_0 de aruncare trebuie să verifice ecuaţia (1.41) (alegem originea O în punctul P_0 de aruncare, atunci $x_0 = y_0 = 0$) :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0). \tag{1.48}$$

Aceasta este o ecuaţie de gradul doi în raport cu $\operatorname{tg} \alpha_0$.

Dacă discriminantul acestei ecuaţii,

$$\Delta \sim \frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{1.49}$$

este negativ, nu avem soluţii reale pentru $\operatorname{tg} \alpha_0$, deci punctul (x, y) nu poate fi atins. Dacă discriminantul este pozitiv, avem două soluţii reale distincte pentru $\operatorname{tg} \alpha_0$: punctul (x, y) poate fi atins prin cele două traiectorii parabole distincte. Anulînd discriminantul, obţinem ecuaţia *aşa-numitei parabole de siguranţă*

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \tag{1.50}$$

locul geometric al punctelor atinse de o singură traiectorie. Pentru punctele exterioare parabolei de siguranţă discriminantul este negativ şi nu avem soluţii reale pentru $\operatorname{tg} \alpha_0$.

Dacă se aruncă corpul cu aceeaşi viteză v_0 sub diferite unghiuri α_0, atunci toate traiectoriile parabole sînt înfăşurate de *parabola de siguranţă* (de fapt un paraboloid cu axa Oy), care este atinsă de o traiectorie dată într-un punct de abscisă şi ordonată :

$$x_t = v_0^2/g \operatorname{tg} \alpha_0 > x_m, \; y_t = \frac{v_0^2}{2g} (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha_0) < y_m. \tag{1.51}$$

Numai punctele situate sub această parabolă de siguranţă pot fi atinse de un corp aruncat cu viteza iniţială v_0 (prin două traiectorii dacă ţinta este interioară şi printr-o singură traiectorie dacă ţinta este pe parabola de siguranţă).

1.10. MIŞCAREA CIRCULARĂ

Viteza pe traiectorie sau viteza liniară este (R = const, θ în radiani, fig. 1.17) :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R = \omega R, \tag{1.52}$$

unde

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{1.53}$$

este *viteza unghiulară* (instantanee sau momentană). Acceleraţia tangenţială este :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R, \tag{1.54}$$

unde

$$\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \tag{1.55}$$

este *acceleraţia unghiulară* (instantanee) în mişcarea circulară. Acceleraţia normală sau centripetă este :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R \tag{1.56}$$

şi acceleraţia totală :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{1.57}$$

Viteza şi acceleraţia pot fi scrise vectorial dacă introducem *vectorul viteză unghiulară* $\vec{\omega}$ situat pe axa cercului în sensul dat de regula burghiului. Atunci vectorul acceleraţie unghiulară $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ va fi situat pe aceeaşi axă $(\vec{\varepsilon} || \vec{\omega})$ (fig. 1.18).

Se vede imediat că

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \tag{1.58}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}, \; \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{v^2}{R^2} \vec{R}. \tag{1.59}$$

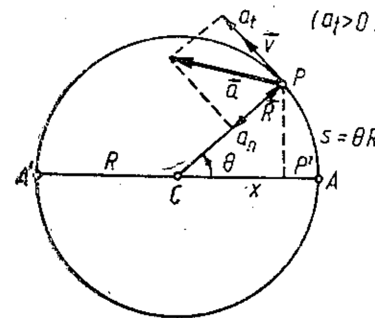


Fig. 1.17

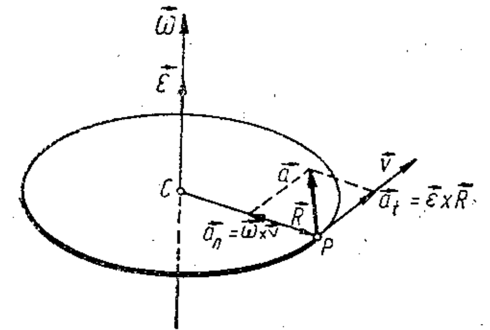


Fig. 1.18

Exemple. a) În cazul mişcării *circulare uniforme* se parcurg arce egale în timpuri egale : $\Delta s/\Delta t$ = const $= v$. Atunci $\omega = v/R$ = const, $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, $a_t = \varepsilon R = 0$, dar $a_n = v^2/R \neq 0$!

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{const} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \to \theta = \int \omega dt, \; \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

$$\text{sau } \theta = \theta_0 + \omega t, \text{ dacă } t_0 = 0. \tag{1.60}$$

Unitatea de viteză unghiulară este egală cu viteza unghiulară a unui mobil care într-o mişcare circulară uniformă descrie un unghi la centru de 1 rad în unitatea de timp (1 s) :

$$\omega = \frac{\theta}{t}, \; [\omega] = [\theta]/[t] = T^{-1} = 1 \text{ s}^{-1} \text{ în SI (sau 1 rad/s)}. \tag{1.61}$$

Frecvenţa ν sau turaţia n se exprimă prin ω astfel:

$$\nu = n = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu, \tag{1.62}$$

$$[\nu] = 1\ s^{-1} \equiv 1\ Hz, \ [n] = 1\ s^{-1} \text{ sau rot/s.} \tag{1.63}$$

Perioada (timpul unei rotaţii complete) este

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}; \ [T] = 1\ s. \tag{1.64}$$

b) În mişcarea circulară *neuniformă* ω este variabil, funcţie de timp. De exemplu, în mişcarea *circulară uniform variată* avem:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{const} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \ \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1.65}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \ \theta = \int \omega dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2,$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0), \tag{1.66}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \theta_0 + \langle\omega\rangle t, \ \langle\omega\rangle = \frac{\omega_0 + \omega}{2}. \tag{1.67}$$

Numărul de rotaţii efectuate:

$$N = (\theta - \theta_0) : 2\pi. \tag{1.68}$$

Unitatea de acceleraţie unghiulară este egală cu acceleraţia unghiulară a unui mobil aflat în mişcare circulară uniform accelerată a cărui viteză unghiulară creşte cu o unitate (1 rad/s) într-un interval de timp egal cu unitatea (1 s):

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \ [\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = T^{-2} = 1\ s^{-2} \text{ (sau 1 rad/s}^2). \tag{1.69}$$

c) Există o analogie între mişcarea circulară (uniformă, uniform variată etc.) şi mişcarea curbilinie sau rectilinie corespunzătoare (uniformă, uniform variată etc.), mai exact între mărimile unghiulare şi cele liniare, în baza formulelor (1.30—32) şi (1.65—67). Mărimile care se corespund sînt următoarele:

Mişcare curbilinie (mărimi liniare)	Mişcare circulară (mărimi unghiulare)	Mişcare curbilinie (mărimi liniare)	Mişcare circulară (mărimi unghiulare)
s	θ	$v^2 = v_0^2 + 2a_t s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$
t	t	$s = \frac{v_0 + v}{2} t$	$\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$
$v = \dot{s}$	$\omega = \dot{\theta}$	$t_m = -v_0/a_t$	$t_m = -\omega_0/\varepsilon$
$s = s_0 + vt$	$\theta = \theta_0 + \varepsilon t$	$s_m = -v_0^2/2a_t$	$\theta_m = -\omega_0^2/2\varepsilon$
$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$	$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$		
$v = v_0 + a_t t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$		
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$		

1.11. MIŞCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ

Proiectînd punctul P care se mişcă uniform pe cerc (fig. 1.17), pe diametrul AA' al cercului, obţinem (notăm aici raza cercului cu A):

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \alpha). \tag{1.70}$$

Mişcarea punctului P' de-a lungul dreptei AA', descrisă de ecuaţia (1.70), se numeşte mişcarea *armonică* (sau sinusoidală) şi joacă un rol important în natură. Mărimea x se numeşte *elongaţie* şi reprezintă distanţa punctului pînă la centrul mişcării; A este *amplitudinea* mişcării, adică elongaţia maximă ($-A \leqslant x \leqslant A$); argumentul $\theta = \omega t + \alpha$ se numeşte *faza* mişcării, α este faza iniţială (adică θ pentru $t = 0$); $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ se numeşte *frecvenţa unghiulară* (sau pulsaţie). Viteza şi acceleraţia punctului material sînt:

$$v = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \alpha) = \omega A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \alpha\right), \tag{1.71}$$

$$-\omega A \leqslant v \leqslant \omega A,$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha) = \omega^2 A\cos(\omega t + \pi + \alpha) = -\omega^2 x, \tag{1.72}$$

$$-\omega^2 A \leqslant a \leqslant \omega^2 A.$$

Viteza este defazată înaintea elongaţiei cu $\pi/2$ sau $T/4$, iar acceleraţia cu π sau $T/2$ (fig. 1.19). Viteza se anulează cînd elongaţia este maximă şi invers, viteza este maximă pentru $x = 0$ (de exemplu, oscilaţiile mici ale unui pendul sau oscilaţiile verticale ale unui corp suspendat pe un resort

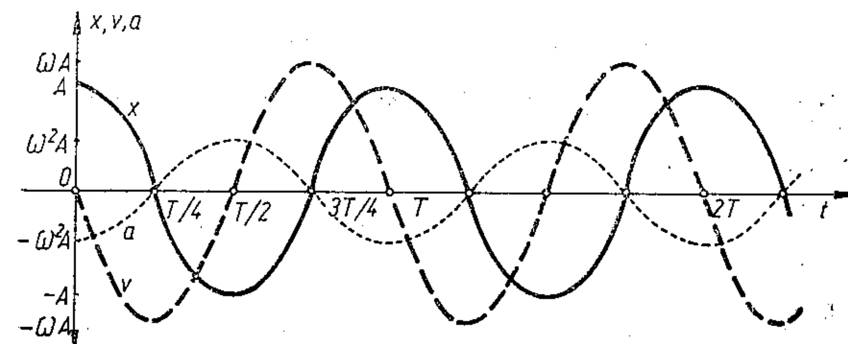


Fig. 1.19

elastic). Acceleraţia este în opoziţie de fază cu elongaţia şi proporţională cu elongaţia, fiind îndreaptată tot timpul spre centrul mişcării.

În ecuaţia (1.70) poate fi luat tot atît de bine şi sinusul în locul cosinusului (adică proiecţia mobilului pe diametrul vertical), aceasta revine la schimbarea fazei iniţiale cu $\pi/2$.

1.12. PRODUSUL SCALAR ȘI PRODUSUL VECTORIAL

1.12.1. PRODUSUL SCALAR

Expresia analitică a produsului *scalar* într-un SC *ortogonal* se obține astfel:
Deoarece

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \ \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0, \tag{1.73}$$

rezultă imediat:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{1.74}$$

Pe de altă parte (notăm $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$):

$$\vec{a}\vec{b} = ab\cos(\vec{a}, \vec{b}), \text{ de unde } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab}. \tag{1.75}$$

Produsul scalar este nul, dacă vectorii sînt perpendiculari.

Exemplu:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2, \ \vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{1.76}$$

(pătratul scalar $\vec{a}^2$ este egal cu pătratul modulului a^2), de unde prin derivare în raport cu un parametru:

$$(\vec{a}^2)^\cdot = (a^2)^\cdot = 2(a_x\dot{a}_x + a_y\dot{a}_y + a_z\dot{a}_z) = 2\vec{a}\dot{\vec{a}} = 2a\dot{a}. \tag{1.77}$$

1.12.2. PRODUSUL VECTORIAL

Expresia analitică a produsului *vectorial* într-un SC *ortogonal* se obține astfel:
Deoarece:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0, \ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} \tag{1.78}$$

rezultă imediat:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + \\ + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} \tag{1.79}$$

sau sub formă de determinant:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \ |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin(\vec{a}, \vec{b}). \tag{1.80}$$

Doi vectori paraleli au produsul vectorial nul.

1.12.3. PRODUSUL MIXT

Cu ajutorul formulelor de mai sus putem demonstra expresia produsului *mixt*, care este simetric la permutări circulare:

$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \tag{1.81}$$

Dacă doi vectori din produsul mixt sînt egali sau paraleli, produsul mixt este nul.
Produsul mixt este numeric egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

1.12.4. DUBLUL PRODUS VECTORIAL

Folosind expresiile analitice de mai sus, putem verifica următoarea dezvoltare a *dublului produs vectorial*:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \tag{1.82}$$

PROBLEME

1.1. Care este hodograful: a) vitezei; b) accelerației, unei pietre aruncată sub un unghi α_0 față de orizontală cu viteza inițială v_0?

R. a) Segmentul de dreaptă: $v_x = v_0\cos\alpha_0$, $|v_y| \leqslant v_0\sin\alpha_0$; (fig. 1.20);
b) Se reduce la un punct.

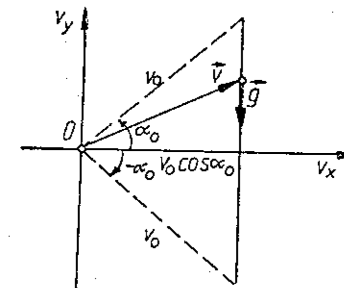


Fig. 1.20

1.2. Care este hodograful vitezei și accelerației unei particule în mișcare circulară uniformă cu viteza v pe un cerc de rază R?

R. Cerc de rază v; cerc de rază v^2/R.

1.3. Care este hodograful vitezei unei particule în mișcare circulară uniform variată?

R. „Spirala" $v^2 = R^2[\omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0)] = v_0^2 + 2a_tR(\theta - \theta_0)$.

1.4. Un corp aruncat oblic în cîmp gravitațional în vid atinge înălțimea maximă $h = 14{,}7$ m, raza de curbură a traiectoriei fiind în acest punct $R = 9{,}8$ m. Să se afle viteza inițială v_0 și unghiul ei α_0 cu orizontala.

R. $v_0 = \sqrt{g(2h + R)} = 19{,}6$ m/s; $\alpha_0 = \text{arctg}\sqrt{2h/R} = 60°$.

1.5. Un corp se mişcă pe o traiectorie după legea $s = b^n v^n - c^n$ (b, c, n — constante pozitive), la momentul iniţial $t = 0$, coordonata iniţială fiind $s_0 = 0$. Să se deducă legea variaţiei vitezei în funcţie de timp.

R. $v = \sqrt[n-1]{\frac{c^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{n-1}{nb^n}\, t}$.

1.6. Într-o mişcare încetinită diagrama vitezei în funcţie de timp este reprezentată printr-un sfert de elipsă din primul cadran (fig. 1.21). Viteza iniţială este $v_0 = 10$ m/s şi timpul pînă la oprire $t_m = 40$ s. Să se calculeze distanţa s_m parcursă pînă la oprire.

R. $s_m = \frac{\pi}{4} v_0 t_m = 314$ m.

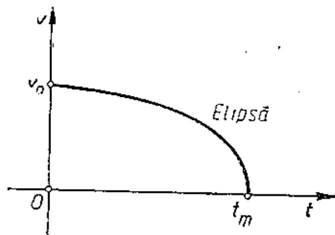


Fig. 1.21

1.7. Cunoscînd acceleraţia tangenţială $a_t = f(t)$ şi timpul pînă la oprire t_m al unui mobil, să se scrie legea vitezei în funcţie de timp şi să se exprime distanţa s_m pînă la oprire printr-o singură integrală.

R. $v = -\int_t^{t_m} f(t)\mathrm{d}t$; $s_m = -\int_0^{t_m} t f(t)\mathrm{d}t$.

1.8. Ecuaţiile cinematice ale mişcării unui mobil sînt: $x = A \cos \omega t$, $y = B \sin \omega t$, (A, B, ω — constante pozitive). Să se afle: a) traiectoria; b) viteza $v(x, y)$; c) hodograful vitezei; d) acceleraţia totală a şi acceleraţia normală a_n; e) raza de curbură a traiectoriei.

R. a) Elipsa $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ parcursă în sens trigonometric; b) $v = AB\omega/h = \omega D'$, unde $h = A^2B^2/\sqrt{B^4x^2 + A^4y^2}$ este distanţa de la origine (centrul elipsei) pînă la tangenta la elipsă, D' = semidiametrul conjugat cu raza vectoare; c) elipsa $v_x^2/A^2 + v_y^2/B^2 = \omega^2$ (asemenea cu traiectoria); d) $a = \omega^2 r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, orientată spre centrul elipsei, $a_n = \omega^2 h$; e) $R = A^2B^2/h^3$.

1.9. Un mobil descrie uniform cicloida (fig. 1.22)

$$x = R(\alpha - \sin \alpha),\ y = R(1 - \cos \alpha)$$

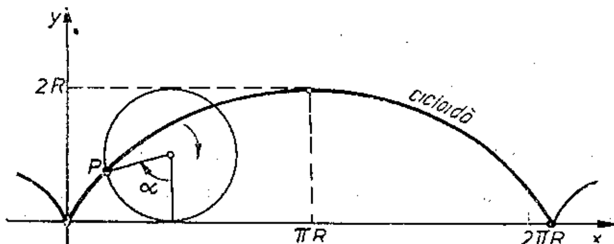


Fig. 1.22

cu viteza constantă v. Să se arate că proiecţia acceleraţiei mobilului pe axa Oy este constantă. Cicloida este curba descrisă de un punct dat al unui cerc de rază R care se rostogoleşte fără lunecare pe o dreaptă fixă (Ox).

Reciproc: Un mobil se mşică uniform pe o curbă plană cu viteza constantă v. Să se găsească ecuaţia curbei, dacă proiecţia acceleraţiei pe o dreaptă din plan care taie curba, este constantă (a_y = const < 0).

R. a) $a_y = -v^2/4R$; b) cicloida (pentru $t = 0$ alegem $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v$, $x = y = 0$):

$$x = R \arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{y(2R - y)},\ (R = -v^2/4a_y).$$

1.10. Un lanţ (sau un fir omogen) suspendat de capetele sale ia sub acţiunea greutăţii forma curbei „lănţişor" (cosinus hiperbolic):

$$y = b \operatorname{ch} \frac{x}{b} = \frac{b}{2}\left(e^{x/b} + e^{-x/b}\right),\ (b = \text{const}).$$

Un mobil se deplasează uniform pe lanţ cu viteza constantă v. Să se calculeze acceleraţia şi raza de curbură în funcţie de poziţia (x, y) a mobilului.

R. $a = bv^2/y^2$, $R = y^2/b$.

1.11. Să se arate că alegînd convenabil scările pentru viteză şi acceleraţie, unghiul sub care se vede vectorul acceleraţiei normale din vîrful vectorului viteză este egal cu unghiul sub care se vede vectorul viteză din centrul de curbură al traiectoriei.

1.12. Să se calculeze, în funcţie de viteză şi acceleraţie, lungimea coardei interceptate pe cercul de curbură de către linia de acţiune a acceleraţiei.

R. $l = 2v^2/a$.

1.13. Un mobil descrie o traiectorie plană astfel, încît $v_x = c$ = const. Să se arate că atunci acceleraţia se scrie

$$a = v^3/Rc,$$

unde v este viteza mobilului şi R raza de curbură.

1.14. Să se arate că în cazul unei mişcări plane viteza pe traiectorie a mobilului se scrie:

$$v = \pm R\dot{\theta},$$

unde R este raza de curbură a traiectoriei, iar θ unghiul dintre vectorul viteză (sau versorul tangentei la traiectorie) şi o dreaptă fixă din planul mişcării.

1.15. Un mobil se mişcă în plan astfel, încît unghiul α dintre viteză şi acceleraţie este constant. Să se arate că viteza pe traiectorie a mobilului se scrie

$$v = v_0 e^{\pm(\theta - \theta_0)\operatorname{ctg}\alpha},$$

unde θ este unghiul dintre vectorul vitezei (sau versorul tangentei la traiectorie) şi o dreaptă fixă din plan.

1.16. Ecuaţiile mişcării unui mobil sînt următoarele:

$$x = r \cos \omega t,\ y = r \sin \omega t,\ z = ct,\ (r,\ \omega,\ c\ \text{— constante pozitive}).$$

Să se afle: a) viteza; b) hodograful vitezei; c) acceleraţia; d) raza de curbură.

R. Traiectoria este o elice (dreaptă) de rază r şi pas $h = c\frac{2\pi}{\omega}$; unghiul de înclinare $\operatorname{tg}\alpha = 2\pi r/h = r\omega/c$; a) $v = \sqrt{r^2\omega^2 + c^2} = r\omega/\sin\alpha$ = const; b) cercul $v_x^2 + v_y^2 = R^2\omega^2$ din planul $v_z = c$ (viteza descrie suprafaţa unui con); c) $a = a_n = r\omega^2 = v^2 \sin^2\alpha/r = v^2/R$, $\vec{a} \perp Oz$ şi taie Oz; d) $R = r/\sin^2\alpha$.

1.17. Un mobil se mişcă uniform variat pe un cerc de rază $R = 10$ cm. Să se afle accelerația normală a_n a mobilului după $t = 20$ s, ştiind că după $N_0 = 5,0$ rot de la pornire viteza mobilului a fost $v_0 = 10$ cm/s.

R. $a_n = \dfrac{v_0^4 t^2}{16\pi^2 N_0^2 R^3} = 1,0$ cm/s².

1.18. Un mobil se mişcă pe o traiectorie circulară după legea $s = ct^3$, unde $c = 0,10$ cm/s³. Să se afle accelerația tangențială a_t în momentul cînd viteza este $v = 0,30$ m/s.

R. $a_t = 2\sqrt{3cv} = 6,0$ cm/s².

1.19. Un mobil se mişcă pe un cerc de rază R astfel, încît unghiul α dintre viteză şi accelerație este constant. Să se exprime viteza în funcție de timp, viteza inițială fiind v_0.

R. $v = \dfrac{v_0 R}{R - v_0 t \operatorname{ctg} \alpha}$.

1.20. Să se calculeze amplitudinea A şi perioada T a oscilațiilor armonice ale unui mobil cunoscînd vitezele mobilului $v_{1,2}$ corespunzătoare elongațiilor $x_{1,2}$.

R. $A = \sqrt{\dfrac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$, $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$.

1.21. Două particule se mişcă cu vitezele constante $\vec{v}_{1,2}$. La un moment dat ele au vectorii de poziție $\vec{r}_{1,2}$. Care este condiția ca particulele să se ciocnească?

R. $\dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$.

1.22. O particulă porneşte cu viteza inițială v_0 avînd accelerația $a = +\omega^2 x$. Să se afle legea vitezei şi legea mişcării.

R. $v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2} = v_0 \operatorname{ch} \omega t$; $x = \dfrac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$.

1.23. O particulă descrie o curbă plană astfel încît dreapta suport a accelerației trece printr-un punct fix. Să se arate că accelerația se poate exprima astfel:

$$a = \pm v \, dv/dr.$$

Cum trebuie tratat cazul *singular* al mişcării circulare uniforme?

1.24. Să se demonstreze că traiectoria unui punct a cărui viteză este constantă în modul, iar accelerația trece printr-un punct fix, este un cerc.

CAPITOLUL 2
PRINCIPIILE DINAMICII

Mecanica clasică (newtoniană) se bazează pe trei legi generale sau *principii*, formulate de Isaac Newton în celebra sa carte „Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1687).

2.1. PRINCIPIUL INERȚIEI (LEX PRIMA)

Experiența arată că un corp în repaus față de Pămînt rămîne în repaus atîta timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri, care să-i modifice această stare. De asemenea, experiențe efectuate cu bile netede şi dure (de exemplu, de metal) lansate pe suprafețe orizontale netede şi dure (de exemplu, pe gheață), cînd greutatea bilei este neutralizată de reacțiunea normală a planului şi forțele de frecare sînt mici, arată că mişcarea bilei se apropie tot mai bine de mişcarea *rectilinie uniformă*. De aici, prin abstractizare, se ajunge la **principiul** sau **legea inerției** (prima lege a lui Newton), cunoscută încă de Galilei (1632):

Un punct material rămîne în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă atîta timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe această stare de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă.

Principiul inerției nu poate fi verificat direct experimental, deoarece nici un corp nu poate fi sustras complet acțiunii altor corpuri, de exemplu, atracției gravitaționale a Pămîntului. Dar este verificat prin toate consecințele sale.

Experiența arată de asemenea că la orice acțiune exterioară care caută să schimbe starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă a corpului, corpul se opune, reacționează, adeseori destul de puternic.

Proprietatea unui corp de a-şi menține starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, în absența acțiunilor exterioare, sau de a se opune la orice acțiune exterioară care caută să-i schimbe starea de mişcare, se numeşte *inerție*.

Astfel, corpurile sînt *inerte* în sensul că nu-şi pot schimba *de la sine* starea lor de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă. *În virtutea inerției* corpurile se mişcă rectiliniu uniform în absența acțiunilor exterioare şi *datorită inerției* tind să-şi mențină această stare de mişcare, opunîndu-se sau reacționînd la acțiunile exterioare.

Conform principiului inerţiei, mişcarea rectilinie uniformă *se autoîntreţine*, adică nu necesită nici o acţiune exterioară pentru menţinerea ei. Dimpotrivă, orice acţiune exterioară strică o astfel de mişcare, curbînd traiectoria şi modificînd viteza, adică produce o mişcare *accelerată*.

În practică se întîlnesc frecvent mişcări rectilinii uniforme, dar totdeauna produse de acţiunea altor corpuri, de exemplu, un tren tras de o locomotivă, o sanie trasă de un cal etc. În asemenea cazuri există totdeauna acţiuni opuse, de obicei frecările, astfel încît în total acţiunile exterioare se compensează reciproc. Prin urmare, principiul inerţiei se aplică şi în cazul **cînd** rezultanta tuturor acţiunilor exterioare asupra punctului material este **nulă**.

Din principiul inerţiei rezultă de asemenea că mişcarea rectilinie uniformă joacă în natură un rol deosebit, privilegiat.

2.2. SISTEMELE DE REFERINŢĂ INERŢIALE

În formularea principiului inerţiei nu se spune nimic despre SR. Or, este evident că mişcarea rectilinie uniformă faţă de un anumit SR *nu* mai este astfel faţă de alte SR *accelerate* faţă de primul. Prin urmare, principiul inerţiei în nici un caz nu poate fi valabil faţă de orice SR. Dacă însă principiul inerţiei este valabil într-un SR dat, atunci el va fi automat valabil în toate SR care se mişcă *rectiliniu uniform* faţă de acesta, şi sigur *nu* va fi valabil faţă de SR care se mişcă *accelerat* faţă de acesta (v. 2.7).

Sistemele de referinţă în care este **valabil** *principiul inerţiei se numesc* **sisteme de referinţă inerţiale.**

Newton a presupus existenţa unui spaţiu absolut şi a unui timp absolut:

„*Spaţiul absolut* nu este, din cauza naturii sale înseşi, în nici un fel de raport cu vreun obiect oarecare, fiind mereu acelaşi şi în nemişcare".

„*Timpul absolut*, adevărat şi matematic, se scurge prin natura sa însăşi uniform, fără nici o relaţie cu vreun obiect oarecare".

„*Mişcarea absolută* este deplasarea unui corp dintr-o poziţie absolută spre altă poziţie absolută".

În spaţiul absolut se alege un SR *absolut*, adică fix şi invariabil. Drept SR absolut era considerat sistemul de coordonate astronomic legat de stelele fixe şi nebuloasele îndepărtate, şi timpul sideral. Experienţa arată că faţă de acest SR principiul inerţiei este valabil cu toată precizia atinsă astăzi. Un sistem inerţial foarte bun este sistemul heliocentric al lui Copernic.

Un SR legat de Pămînt nu este riguros inerţial, aşa cum confirmă experienţele, din cauza rotaţiei diurne a Pămîntului. Abaterile sînt însă mici şi în primă aproximaţie le putem de obicei neglija, considerînd SR legat de Pămînt ca fiind *practic inerţial*.

Din punctul de vedere al principiului inerţiei toate SR inerţiale sînt *absolut echivalente*, nici unul din ele nu poate fi considerat fix sau absolut. Aceeaşi concluzie rezultă şi din celelalte principii ale mecanicii, astfel încît se poate afirma că *nu există un spaţiu absolut, care să poată fi luat drept* SR.

Mai mult, în teoria relativităţii se arată că spaţiul şi timpul sînt *legate între ele* şi proprietăţile lor sînt *determinate de materie şi mişcare*.

O formulare mai cuprinzătoare şi mai profundă a principiului inerţiei este următoarea:

Particule suficient de depărtate unele de altele (izolate între ele) se mişcă unele faţă de altele rectiliniu uniform.

2.3. NOŢIUNEA DE FORŢĂ

Noţiunea de *forţă* are la origine senzaţia de efort care apare atunci cînd ridicăm sau ţinem o greutate, cînd tragem sau împingem un corp pe o suprafaţă. Totodată putem indica *direcţia şi sensul* în care îndreptăm efortul, precum şi punctul unde aplicăm acest efort. De aici se obţine prin abstractizare noţiunea de *forţă ca vector*. Prin intermediul forţelor corpurile acţionează unele asupra altora, transmiţînd mişcarea mecanică.

Forţele produc efecte *statice* de *deformare* a corpurilor (sau de echilibrare a altor forţe) şi efecte *dinamice* de modificare a vitezei, adică de creare a *acceleraţiilor*.

Exemple de forţe: greutatea corpurilor, presiunea sau tracţiunea produse de corpuri sau fire, reacţiunea elastică a unui resort deformat, rezistenţa opusă de fluid la înaintarea unui corp etc.

Măsurarea forţelor se face pe baza efectelor lor. Există corpuri, numite *elastice*, la care deformaţiile (nu prea mari) dispar odată cu îndepărtarea forţelor care le-au produs, de exemplu, resorturile. Se poate considera că deformările elastice sînt proporţionale cu forţele care le produc. *Dinamometrele* sînt resorturi elastice prevăzute cu riglă gradată pentru măsurarea alungirilor, deci şi a forţelor respective. Un etalon mai bun îl constituie greutatea unui anumit corp de referinţă într-un anumit loc pe suprafaţa Pămîntului.

Astfel, unitatea *kilogram-forţă* (kgf) este greutatea (în vid) a etalonului masă de 1 kg (păstrat la Sèvres) în cîmpul gravitaţional normal (*standard*) $g_n = 9{,}80665$ m/s² *care coincide practic* cu valoarea $g_0 = 9{,}80616$ m/s² de la nivelul mării şi paralela 45°.

Experienţele (nerelativiste) arată că forţele se compun după regula paralelogramului (Heron din antichitate, S. Stevin — 1605, G. Roberval — 1636), adică sînt mărimi *vectoriale*. De aici se abstrage **principiul independenţei acţiunii forţelor** (formulat separat de Newton):

Un corp sub acţiunea simultană a două forţe descrie (pornind din repaus) diagonala unui paralelogram avînd ca laturi aceste forţe, în acelaşi timp în care ar descrie separat fiecare latură sub acţiunea forţei corespunzătoare.

2.4. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL (LEX SECUNDA)

Dacă aplicăm unui punct material diferite forţe $\vec{F}$, punctul material capătă acceleraţii $\vec{a}$ coliniare şi proporţionale cu forţele aplicate (fig. 2.1):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{2.1}$$

unde m este un parametru pozitiv, caracteristic punctului material, numit *masă*. Newton a definit masa unui corp ca *măsură a cantităţii de materie* conţinute în corp. Cu cît masa unui corp este mai mare, cu atît acceleraţia, produsă de o

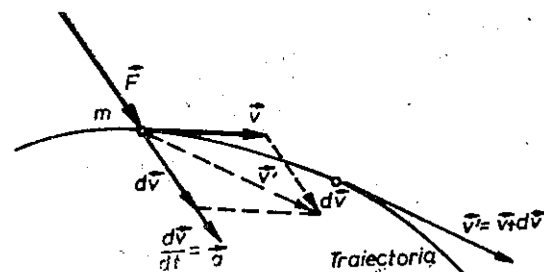


Fig. 2.1

forță dată, este mai mică. De aici rezultă că *masa unui corp este o măsură a inerției sale,* adică o măsură a gradului de opunere sau de reacțiune a corpului la acțiunea forțelor exterioare care îi schimbă starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă. În această calitate de *măsură a inerției,* masa m se numește *masă inertă* sau *inerțială* și se manifestă deci sub dublu aspect, pasiv și activ : în absența forțelor exterioare corpul își păstrează mișcarea rectilinie uniformă, conform principiului inerției, iar sub acțiunea unei forțe exterioare admite o accelerație invers proporțională cu masa sa inertă, conform principiului fundamental.

Ecuația (2.1) reprezintă **legea fundamentală** a dinamicii (legea a doua a lui Newton, 1687).

Observații : 1) Ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$ nu ne spune nimic despre *natura* forței ; ea poate fi de natură gravitațională, electromagnetică, nucleară sau în particular, forță elastică, forță de frecare etc.

În ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$ forța apare sub formă abstractă ca un *model mecanic* al oricărei interacțiuni a corpurilor, independent de natura fizică a acestei interacțiuni. În modul acesta, ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$, pe lîngă caracterul de *lege a naturii*, poartă și caracterul de *definiție dinamică* a forței. De aceea pentru determinarea mișcării unui sistem trebuie cunoscută și *legea forței*, de exemplu, pentru oscilatorul elastic trebuie cunoscută legea lui Hooke, pentru sistemul solar — legea atracției gravitaționale, pentru atom — legea lui Coulomb a interacției electrostatice (mai general, electromagnetice) etc.

2) Experiența arată că principiul fundamental este valabil numai în SR *inerțiale*, la fel ca și principiul inerției. Legea fundamentală (2.1) nu se schimbă cînd trecem de la un SR inerțial la altul, deoarece nici mărimea forței (măsurată cu dinamometrul, deci cu ajutorul riglelor și ceasornicelor), nici mărimea accelerației nu se schimbă în acest caz (după cum vom vedea în 2.7).

Vom stabili mai tîrziu modul în care se scrie legea fundamentală în cazul unui SR neinerțial (cap. 10).

3) În *teoria restrînsă a relativității* a lui Einstein (1905) se arată, și experiențele confirmă, că la viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii în vid $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ m/s, masa corpului nu rămîne constantă, ci crește cu viteza după legea :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (2.2)$$

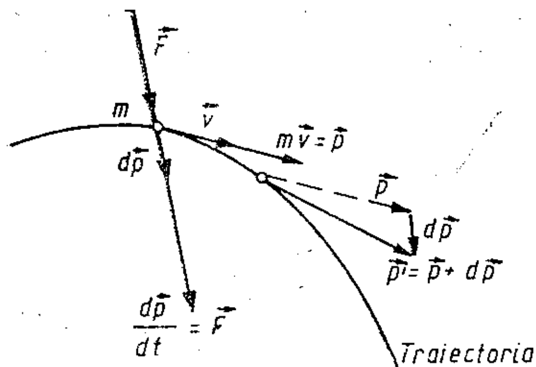


Fig. 2.2

unde m_0 este masa corpului în repaus. Atunci legea fundamentală (2.1) trebuie scrisă corect astfel (așa a scris-o și Newton) :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \qquad (2.3)$$

Produsul $m\vec{v}$ reprezintă deci o mărime importantă (cantitatea de mișcare sau impulsul punctului material) (fig. 2.2).

Mecanica clasică nu este valabilă nici în domeniul atomic, unde se aplică mecanica *cuantică*.

2.5. GREUTATEA ȘI MASA

Greutatea unui corp este în esență *forța* cu care el este atras de Pămînt (v. § 10.2). Static, greutatea se manifestă prin forța cu care corpul apasă pe un plan orizontal sau întinde firul de suspensie. Dinamic, greutatea produce căderea corpului lăsat liber. Experiența arată că în vid, cînd nu acționează decît forța de greutate, toate corpurile cad (într-un loc dat) cu *aceeași* accelerație g independentă de masa, natura, dimensiunile sau forma corpurilor, deci conform ecuației (2.1) :

$$G = mg, \quad g = G/m. \qquad (2.4)$$

Această relație este fundamentală pentru *măsurarea* masei, deoarece reduce compararea maselor la compararea *greutăților* lor, într-un același loc :

$$G_1/G_2 = m_1/m_2. \qquad (2.5)$$

Măsurarea masei se face cu ajutorul *balanței*.

Unitatea de masă, numită *kilogram*, este egală cu masa prototipului din platină-iridiu păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de la Sèvres (Franța).

În SI masa se alege ca mărime fundamentală, forța fiind atunci o mărime derivată. Unitatea de forță rezultă din legea fundamentală :

$$[F] = [m][a] \rightarrow [F] = MLT^{-2} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 = 1\ \text{N în SI}$$
$$\text{sau } [F] = 1\ \text{g}\cdot\text{cm/s}^2 = 1\ \text{dyn} = 10^{-5}\ \text{N în CGS.} \qquad (2.6)$$

Unitatea de forță (1 N) este egală cu forța care aplicată unei mase egale cu unitatea (1 kg) îi imprimă o accelerație egală cu unitatea (1 m/s²).

Unitatea *kilogram forță* (kgf) din sistemul tehnic MKfS este egală cu greutatea unui kilogram-masă în cîmpul gravitațional normal $g_n = 9{,}80665$ m/s² sau, în altă formă, este forța care aplicată unei mase de 1 kg îi imprimă o accelerație egală cu accelerația gravitațională normală $g_n = 9{,}80665$ m/s² :

$$1\ \text{kgf} = 1\ \text{kg}\cdot 9{,}80665\ \text{m/s}^2 = 9{,}80665\ \text{N} \approx 9{,}8\ \text{N}. \qquad (2.7)$$

De aici se vede că într-un cîmp gravitațional *normal* (standard) masa unui corp exprimată în kg coincide *numeric* cu greutatea sa exprimată în kgf, *nu* însă în alte cîmpuri gravitaționale. De exemplu, pe Lună, un corp cu masa de 1 kg are greutatea de 0,165 kgf ($g_L = 1{,}62$ m/s²), iar pe Soare : 27,8 kgf ($g_S = 271$ m/s²).

Subliniem încă o dată deosebirea dintre greutatea unui corp și masa sa :

Greutatea unui corp este o *forță*, egală cu forța de atracție exercitată de Pămînt. Ea variază cu altitudinea și latitudinea, fiind dependentă de cîmpul gravitațional. Greutatea se măsoară cu *dinamometrul*. *Masa* este o mărime *scalară*, o caracteristică internă a corpului, independentă de altitudine și latitudine. Masa se măsoară cu *balanța* (se poate măsura și cu dinamometrul prin metoda *substituției* : se măsoară alungirea produsă de corpul măsurat, apoi se înlocuiește corpul cu mase etalon pînă se obține *aceeași* alungire).

Proprietatea corpurilor de a atrage alte corpuri și de a fi atrase de alte corpuri, exprimată în legea atracției universale a lui Newton (cap. 8), este cea de-a doua manifestare a masei (alături de inerție). În această calitate

masa se numește *masa grea* sau *gravifică* (sau *gravitațională*) și este o măsură a interacțiunii corpului cu cîmpul gravitațional. Datorită *masei gravifice* corpurile creează un cîmp gravitațional și suferă acțiunea unui cîmp gravitațional; de aceea masa gravifică se mai numește și „sarcină" gravifică, fiind analoagă sarcinii electrice.

Experiențele confirmă cu mare precizie faptul că *cele două proprietăți, inerția și gravitatea, se datoresc unei mărimi unice: masa corpului*, cu alte cuvinte, **masa inertă este egală cu masa gravifică.** Acest fapt stă la baza teoriei generale a relativității (a cîmpului gravitațional) a lui Einstein (1916).

În baza acestei egalități, aceeași formulă (2.4) exprimă forța gravitațională static prin masa grea și în același timp dinamic prin masa inertă. Cu ajutorul balanței măsurăm masa grea, deci automat și masa inertă.

2.6. PRINCIPIUL ACȚIUNII ȘI REACȚIUNII (LEX TERTIA)

Experiența arată că acțiunea unui corp asupra altuia poartă totdeauna caracterul unei *interacțiuni*, adică acțiunea unui corp asupra altuia naște simultan o reacțiune a acestuia din urmă asupra primului, — corpurile acționează deci unul asupra celuilalt.

Principiul III afirmă că *fiecărei acțiuni i se opune totdeauna o reacțiune, egală în modul și de sens contrar*, sau, altfel, *acțiunile reciproce a două corpuri (puncte materiale) sînt totdeauna egale în modul și dirijate în sensuri contrare* (legea a treia a lui Newton). Cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, sînt aplicate *simultan* și la corpuri *diferite* (de-a lungul dreptei care unește cele două corpuri).

Subliniem că aici este vorba de o *interacție mutuală simultană* și *nu* de o cauză și un efect.

Exemple. În statică: un corp așezat pe un plan orizontal apasă asupra planului cu greutatea sa, deformîndu-l. Se naște simultan o reacțiune din partea planului, egală în modul și de sens opus, aplicată corpului. În dinamică: dacă tragem accelerat un cărucior cu o forță dată, resimțim simultan asupra noastră o reacțiune egală în modul și de sens contrar din partea căruciorului.

Acțiunea și reacțiunea apar nu numai la contactul a două corpuri, ci și în cazul interacțiunii prin intermediul unui cîmp. De exemplu, atracția gravitațională reciprocă dintre două corpuri, interacțiunea dintre două corpuri cu sarcini electrice etc.

2.7. TRANSFORMĂRILE LUI GALILEI

Un *eveniment* (de exemplu, ciocnirea a două particule, prezența unei particule clasice într-un anumit loc la un anumit moment etc.) este caracterizat prin *patru* coordonate: locul — prin 3 coordonate spațiale x, y, z și momentul — prin timpul t (coordonata temporală).

Un *același* eveniment sau proces (de exemplu, mișcarea unei particule) poate fi studiat din două SR diferite — vom spune de către doi *observatori* diferiți, fiindcă oricînd putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că în fiecare SR se află cîte un observator care studiază evenimentele și reciproc, de fiecare observator este legat un SR propriu (SC, riglă și ceasornic). Fiecare observator măsoară coordonatele evenimentelor cu instrumentele *sale* (rigla și ceasornicul) și stabilește legile exprimate în aceste coordonate.

2.7.1. TRANSFORMĂRILE LUI GALILEI

Este important de stabilit legătura dintre coordonatele unui eveniment măsurate de diferiți observatori (adică din diferite SR), adică *transformările de coordonate care dau trecerea de la un SR la altul.* Astfel putem vedea care aspecte ale fenomenelor și legilor sînt *relative*, adică dependente de SR și care sînt *absolute* sau *invariante*, adică independente de SR (aceleași pentru toți observatorii).

Vom presupune că riglele și ceasornicele diferiților observatori sînt *construite și etalonate identic*, adică după aceeași „rețetă" (același procedeu tehnologic).

Fie două SR notate cu S și S' (fig. 2.3). Presupunem că S' se mișcă față de S *rectiliniu uniform* cu viteza *constantă* $\vec{u}$. Din punctul de vedere al observatorului S, aplicînd regula adunării vectoriale, rezultă conform fig. 2.3:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{OO'}, \text{ dar } OO' = \vec{r}_0 + \vec{u}t,$$

deci

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{u}t, \quad t' = t - t_0, \tag{2.8}$$

unde toate mărimile sînt măsurate cu instrumentele din S. Dar *nu această* legătură ne interesează. Noi vrem să stabilim legătura dintre coordonatele $(\vec{r}, t)$ ale evenimentului P, măsurate de observatorul S cu instrumentele *sale*, și coordonatele $(\vec{r}', t')$ ale aceluiași eveniment dar măsurate de observatorul S' *cu instrumentele sale.* Or, instrumentele (rigla și ceasornicul) din S' se află *în mișcare* față de S! Dar atunci vectorul $\overrightarrow{O'P} = \vec{r}'$ măsurat de fiecare observator din S și S' cu instrumentele *lui*, va da același rezultat?

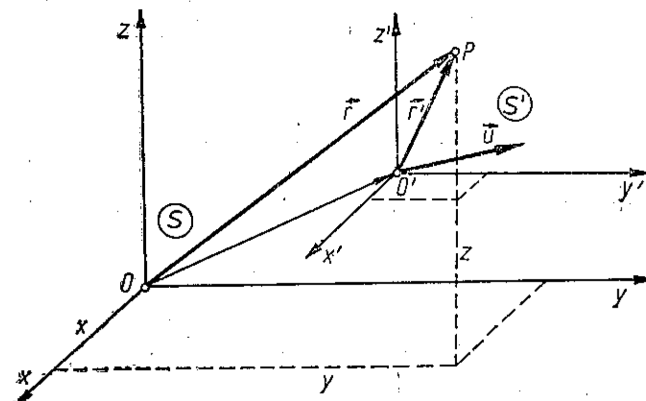


Fig. 2.3

În mecanica clasică newtoniană se consideră că *lungimile (distanțele) și duratele (intervalele de timp), măsurate în diferite* SR, *sînt aceleași, adică au un caracter absolut sau invariant*, adică rezultatele măsurătorilor de lungime și durată nu depind nici de mișcarea instrumentelor de măsură (rigle și ceasornice), nici de mișcarea obiectelor măsurate.

Această ipoteză este foarte bine verificată în domeniul vitezelor obișnuite (chiar pentru viteze cosmice), dar în domeniul vitezelor foarte mari,

apropiate de viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (de exemplu, în cazul particulelor elementare), această ipoteză nu mai este exactă şi trebuie aplicată *mecanica relativistă*.

Rămînînd în cadrul mecanicii clasice, în baza caracterului absolut al lungimilor, riglele din diferite SR (construite şi etalonate la fel) vor indica aceeaşi lungime, dimensiunile unui obiect sau distanţa spaţială dintre două evenimente va fi aceeaşi în toate SR. La fel, în baza caracterului absolut al duratelor, ceasornicele din diferite SR (construite şi etalonate la fel), vor arăta aceleaşi durate sau intervale de timp ale proceselor, durata unui proces sau distanţa temporală dintre două evenimente va fi aceeaşi în toate SR. Timpul va curge la fel în toate SR. Evenimente simultane într-un SR vor fi simultane în toate SR (pentru toţi observatorii), adică simultaneitatea evenimentelor are caracter absolut sau invariant.

Admiţînd această ipoteză, putem considera că în relaţiile (2.8) toate mărimile fără accent, adică $\vec{r}$, t, sînt măsurate de observatorul S cu instrumentele *sale*, iar mărimile cu accent, adică $\vec{r}'$, t', sînt măsurate de observatorul S' cu instrumentele *sale*, adică (2.8) ne dau chiar legătura căutată dintre coordonatele unui eveniment P, măsurate în S, şi coordonatele aceluiaşi eveniment P măsurate în S'.

Relaţiile (2.8) se numesc **transformările lui Galilei**; ele dau trecerea de la un SR la altul, mişcat *rectiliniu uniform* faţă de primul. Cunoscînd coordonatele $(\vec{r}, t)$ ale unui eveniment, măsurate într-un SR dat (cu instrumentele din acest SR), putem calcula coordonatele $(\vec{r}', t')$ ale acestui eveniment, măsurate în oricare alt SR, în mişcare rectilinie uniformă faţă de cel dat.

2.7.2. COMPUNEREA VITEZELOR

Scriind transformările inverse, care dau trecerea de la S' la S:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 + \vec{u}(t' + t_0), \quad t = t' + t_0, \tag{2.9}$$

diferenţiindu-le:

$$d\vec{r} = d\vec{r}' + \vec{u}dt', \quad dt = dt' \tag{2.10}$$

şi împărţindu-le membru la membru:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}' + \vec{u}\,dt'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{u},$$

găsim *legea clasică de compunere (sau de transformare) a vitezelor*:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \tag{2.11}$$

adică viteza $\vec{v}$, faţă de S, este egală cu viteza „relativă" $\vec{v}'$, faţă de S' plus viteza de „transport" $\vec{u}$ a sistemului S' faţă de S.

2.7.3. COMPUNEREA ACCELERAŢIILOR

Diferenţiind relaţiile (2.11) şi împărţindu-le la $dt = dt'$, obţinem *legea de compunere (sau de transformare) a acceleraţiilor*:

$$d\vec{v} = d\vec{v}', \ (d\vec{u} = 0), \ dt = dt',$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt'}, \quad \vec{a} = \vec{a}', \tag{2.12}$$

adică *acceleraţia este aceeaşi în toate sistemele de referinţă care se mişcă rectiliniu uniform* ($\vec{u}$ = const) *unele faţă de altele*, adică acceleraţia este *invariantă* faţă de sistemele de referinţă aflate în *translaţie relativă uniformă*.

Dacă acceleraţia este *nulă* într-un sistem S, adică particula este în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform faţă de S, atunci acceleraţia va fi nulă în oricare alt sistem S' mişcat *rectiliniu uniform* faţă de primul, adică particula va fi în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă în toate aceste sisteme de referinţă aflate în *translaţie uniformă* unele faţă de altele.

Dacă acum *principiul inerţiei* este valabil faţă de un SR, deci acesta este *inerţial*, atunci acest principiu va fi valabil în toate SR aflate în translaţie uniformă faţă de primul, care vor fi de asemenea inerţiale (şi sigur *nu* va fi valabil faţă de SR *accelerate* faţă de primul), deci avem o familie de SR inerţiale care se mişcă unele faţă de altele rectiliniu uniform.

Reciproc, dacă două SR sînt inerţiale, atunci ele se află în translaţie uniformă unul faţă de celălalt, altfel invarianţa acceleraţiei (2.12) ar fi violată ($\vec{u} \neq$ const; $d\vec{u}/dt \neq 0$) şi $\vec{a} = 0$ într-un sistem n-ar implica $\vec{a}' = 0$ în celălalt sistem.

2.8. PRINCIPIUL RELATIVITĂŢII (DIN MECANICA CLASICĂ)

Cele trei principii ale mecanicii sau legi ale lui Newton sînt *suficiente* pentru a clădi întregul edificiu al mecanicii clasice cu toate legile sale.

Primul principiu (al inerţiei) este valabil în toate SR inerţiale, deoarece este chiar folosit pentru a defini aceste sisteme.

Al doilea principiu (al acţiunii forţei) este de asemenea valabil în toate SR inerţiale. În adevăr, pe de o parte, acceleraţia este aceeaşi (invariantă) faţă de toate SR inerţiale, după cum am arătat, iar masa se consideră *constantă* în mecanica clasică newtoniană, deci $m\vec{a}$ este invariant. Pe de altă parte, măsurarea *forţei* cu dinamometrul se reduce la măsurarea *alungirii* unui resort, adică la măsurarea simultană a coordonatelor capetelor resortului, ceea ce, în virtutea caracterului absolut al lungimilor şi duratelor (în particular, a simultaneităţii), va conduce la acelaşi rezultat pentru forţă în diferite SR, deci ecuaţia fundamentală a dinamicii $\vec{F} = m\vec{a}$, este aceeaşi în toate SR inerţiale.

În sfîrşit, al treilea principiu (al acţiunii şi reacţiunii) este şi el valabil în toate SR inerţiale.

Principiile mecanicii newtoniene fiind aceleași în toate SR *inerțiale*, rezultă că **toate** *legile mecanicii* (care sînt consecințe ale principiilor) *sînt aceleași în orice SR inerțiale.*

Acesta este conținutul **principiului relativității** în mecanică, găsit încă de Galilei (1632).

Folosind transformările Galilei, putem enunța principiul relativității astfel:

Legile mecanicii clasice newtoniene sînt invariante la transformările Galilei, pe scurt, sînt Galilei-invariante sau G-invariante.

De aici rezultă că din punct de vedere mecanic toate SR inerțiale sînt *absolut echivalente;* nici un SR inerțial nu poate fi considerat fix sau absolut, toate sînt egal îndreptățite.

Prin urmare, nici o experiență mecanică efectuată în *interiorul* unui laborator inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea sa rectilinie uniformă față de stelele fixe (față de alte SR inerțiale). De exemplu, nici o experiență mecanică efectuată într-o cabină închisă a unui vapor sau avion, aflat în mișcare rectilinie uniformă față de Pămînt, nu ne permite să determinăm mișcarea acestui vapor sau avion. Într-adevăr, nu ne putem da seama dacă vaporul (trenul) merge rectiliniu uniform sau stă pe loc, deoarece toată activitatea noastră decurge absolut la fel în cele două cazuri. Lucrurile se schimbă radical într-un SR *neinerțial.* În acest caz legile lui Newton nu mai sînt valabile și cu ajutorul experiențelor mecanice efectuate în *interiorul* sistemului (pe baza abaterilor de la legile lui Newton) putem determina accelerația acestuia, de exemplu rotația sa, față de SR inerțiale (față de stele). Astfel se poate dovedi cu ajutorul experiențelor mecanice efectuate într-un laborator pe Pămînt, că Pămîntul se rotește (abateri în căderea liberă a corpurilor, rotația planului de oscilație a unui pendul).

Principiul relativității din mecanică a fost extins de A. Einstein (1905) la *întreaga fizică.* Astfel, toate legile *fizicii* (mecanice, electromagnetice, optice, nucleare etc.) sînt aceleași în toate SR inerțiale, sau altfel, nici o experiență de *fizică* efectuată în *interiorul* unui laborator inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de alte laboratoare inerțiale (față de stele și nebuloase îndepărtate).

Trebuie observat că spre deosebire de mecanica clasică newtoniană, în mecanica relativistă lungimile și duratele se schimbă atunci cînd trecem de la un SR inerțial la altul (contracția lungimilor și dilatarea duratelor), de aceea se obțin *alte transformări de coordonate (transformările Lorentz)* în locul transformărilor Galilei (v. cap. 11).

PROBLEME

2.1. Să se considere cazul particular al transformărilor Galilei cînd sistemele S, S' au axele paralele, se mișcă de-a lungul axei comune Ox și la $t = t' = 0$ originile lor coincideau (fig. 2.4).

R. $$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t,\ t' = t \text{ și reciproc: } \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t',\ t = t' \quad (2.13)$$

sau pe componente:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (2.14)$$

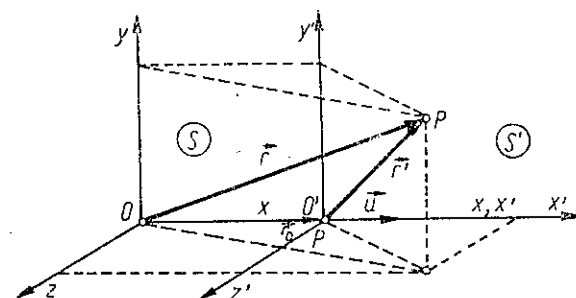


Fig. 2.4

de unde compunerea vitezelor:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \text{ sau } v_x = v'_x + u,\ v_y = v'_y,\ v_z = v'_z \quad (2.15)$$

și invarianța accelerației:

$$\vec{a} = \vec{a}', \text{ sau } a_x = a'_x,\ a_y = a'_y,\ a_z = a'_z. \quad (2.16)$$

2.2. Se poate construi un sistem coerent „gravitațional" de unități, scriind legea atracției gravitaționale $F = -mM/r^2$. Păstrînd unitățile fundamentale L, M, T, care ar fi atunci dimensiunile forței și energiei? Cum s-ar scrie principiul II?

R. $[F] = M^2L^{-2} = \text{kg}^2/\text{m}^2$ = forța de atracție dintre două particule de cîte 1 kg la distanța de 1 m; $[W] = M^2L^{-1} = \text{kg}^2/\text{m}$ etc.; $F = \frac{1}{\gamma} ma$, unde $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ este constanta gravitațională.

CAPITOLUL 3

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

Din legea fundamentală a mecanicii $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ rezultă trei teoreme: a impulsului (sau cantității de mișcare), a momentului cinetic și a energiei cinetice. Aceste trei teoreme sînt valabile atît în mecanica clasică, cît și în mecanica relativistă, cu deosebirea că în mecanica clasică masa se consideră constantă, iar în mecanica relativistă masa crește cu viteza după legea (2.2) și de aceea expresia energiei *cinetice* este alta.

3.1. TEOREMA IMPULSULUI

Legea fundamentală a mecanicii:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{p} \overset{\mathrm{def}}{=} m\vec{v}, \tag{3.1}$$

unde $\vec{p} = m\vec{v}$ este *impulsul* punctului material (cantitatea de mișcare), afirmă că *forța aplicată punctului material este egală cu derivata impulsului punctului material în raport cu timpul.*

Din ecuația (3.1) rezultă

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v}) = \mathrm{d}\vec{p}, \tag{3.2}$$

$$\vec{H} \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1. \tag{3.3}$$

În mecanica relativistă masa este constantă, de aceea (3.3) devine:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \tag{3.4}$$

Integrala $\vec{H}$ se numește *impulsul forței* (în teoria ciocnirilor se mai numește *percuție*). Ecuația (3.3) exprimă teorema impulsului.

Teorema impulsului: *Impulsul forței rezultante aplicate punctului material este egal cu variația impulsului punctului material.*

Dacă rezultanta forțelor aplicate este permanent nulă, impulsul punctului material se conservă, adică punctul material rămîne în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă. Un punct material nu-și poate schimba de la sine impulsul său (măsura mișcării mecanice), ci numai sub acțiunea unei forțe aplicate lui.

Conform principiului III, forța $\vec{F}$ este efectul *interacțiunii* punctului material cu alte corpuri, asupra cărora se exercită acțiunea $\vec{F}' = -\vec{F}$ din partea punctului material. Putem, astfel, scrie

$$-\vec{F}' = \vec{F} \rightarrow -\int \vec{F}'\,\mathrm{d}t = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t = \Delta\vec{p}, \tag{3.5}$$

prin urmare, creșterea vectorială a impulsului punctului material se obține pe seama scăderii corespunzătoare a impulsului corpurilor care au acționat asupra sa. Avem deci un *transfer* de impuls de la un corp la altul, realizat prin intermediul forței, în procesul interacțiunii. Impulsul este o *măsură* vectorială (de tip spațial) a mișcării (din punctul de vedere al translației spațiale). Teorema impulsului exprimă o lege de conservare a mișcării materiei. Existența mărimii fizice impuls și a legii fizice de conservare a impulsului este legată de proprietatea de *omogenitate* a spațiului (simetria la translații).

Impulsul se măsoară în N·s = kg·m/s (în SI) sau dyn·s = g·cm/s (în CGS).

În procesele de ciocniri, unde apar forțe puternice în intervale scurte de timp, impulsul forței se mai numește uneori *percuție* (sau percusiune).

3.2. MOMENTUL FORȚEI. MOMENTUL CINETIC

Dacă un rigid are un punct fix (o articulație) în jurul căruia se poate roti liber, atunci aplicînd o forță rigidului, el se va roti în jurul unei axe trecînd prin articulație, perpendiculară pe planul definit de articulație și forță (fig. 3.1). Efectul este același, oriunde am aplica forța pe suportul său (de exemplu, prin intermediul unui fir lung). Dacă suportul forței trece prin articulație, rigidul evident *nu* se rotește. Efectul de rotație este determinat de forță și de distanța suportului său pînă la articulație (*brațul* forței). Ținînd seama de direcția axei și sensul rotației, putem spune că efectul de rotație este dat de **momentul forței** *față de polul O, definit prin produsul vectorial:*

$$\vec{M} \overset{\mathrm{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}, \qquad M = rF\sin\alpha = Fb, \tag{3.6}$$

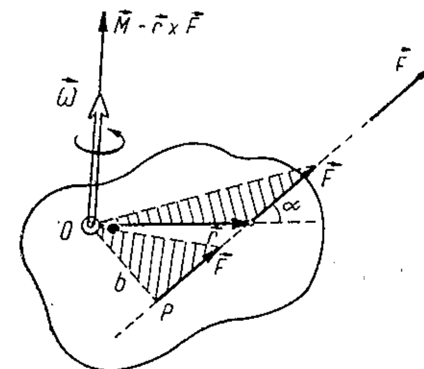


Fig. 3.1

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței, iar b — *brațul* forței, adică distanța de la pol la dreapta de acțiune a forței (fig. 3.1) (Ch. Huygens 1693, L. J. Lagrange 1793). Momentul forței se măsoară în N·m.

Momentul forței este numeric egal (ca la orice produs vectorial) cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori $(\vec{r}, \vec{F})$ sau cu dublul ariei triunghiului construit din O pe $\vec{F}$. Momentul *nu* se schimbă dacă forța *lunecă* pe suportul său.

Dacă rigidul are o *axă* fixă în jurul căreia se poate roti liber, atunci o forță paralelă cu axa de rotație sau concurentă cu aceasta *nu* produce rotație. Efectul de rotație este produs numai de componenta *transversală* (pe axă) a forței, înmulțită cu brațul ei, adică de **momentul forței în raport cu axa** (fig. 3.2):

$$M_{\parallel} \overset{\text{def}}{=} F_{\perp} b. \tag{3.7}$$

Acesta este egal totodată cu proiecția pe axă a vectorului moment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ față de un pol de pe axă:

$$M_{\parallel} = \vec{e}\vec{M} = \vec{e}(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{e}\,(\vec{b} \times \vec{F}_{\perp}),\ \vec{e} \text{ -- versorul axei.} \tag{3.8}$$

Cealaltă componentă $M_{\perp}$ tinde să rotească doar axa de rotație.

La fel ca mai sus se definește *momentul oricărui vector*, de exemplu, *momentul impulsului*, numit **moment cinetic** (sau moment unghiular) (fig. 3.3):

$$\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{3.9}$$

Momentul cinetic se măsoară în J·s (sau erg·s).

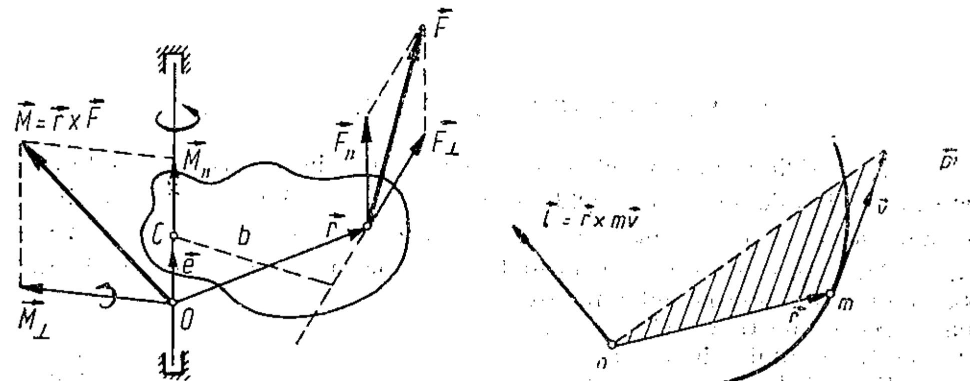


Fig. 3.2 **Fig. 3.3**

3.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

Derivînd r·· a (3.9) în raport cu timpul și înlocuind derivata impulsului prin forță, conf ·m ecuației fundamentale (3.1), obținem

$$\frac{d\vec{L}}{d} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M},$$

deoarece $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} \equiv 0$, fiind vectori paraleli, deci

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}},\ \vec{M} = \dot{\vec{L}}, \tag{3.10}$$

Momentul forței este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul. Momentul forței și momentul cinetic se consideră față de același punct (pol) *fix* într-un SR inerțial).

Se poate spune că (3.10) este o „transcriere" sub forma *unghiulară* a lui lex secunda (care are forma liniară).

Analog ca la teorema impulsului obținem **teorema momentului cinetic**:

$$\vec{K} \overset{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \int \vec{r} \times d\vec{H} = \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1, \tag{3.11}$$

adică *impulsul momentului (sau momentul impulsului) forței aplicate punctului material este egal cu variația momentului cinetic al punctului material.*

Dacă momentul forței rezultante este permanent nul, momentul cinetic al punctului material se conservă: un punct material nu-și poate schimba momentul său cinetic decît sub acțiunea unui moment al forței.

Exemple. a) În mișcarea *rectilinie uniformă* $\vec{F} \equiv 0$, $\vec{M} \equiv 0$, deci impulsul $\vec{p}$ se conservă și momentul cinetic $\vec{L}$ față de orice pol se conservă (fig. 3.4). Aceasta rezultă și direct, căci momentul unui vector nu se schimbă dacă vectorul ($m\vec{v}$ = const) *lunecă* pe suportul său.

b) În mișcarea *circulară uniformă* forța este centripetă, trece permanent prin centrul cercului, deci momentul ei față de acest centru este permanent zero (fig. 3.5). Atunci momentul cinetic al particulei față de centrul cercului se conservă (fig. 3.6). Acest lucru se găsește și direct căci $|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv = mr^2\omega =$ const (fiindcă $v = |\vec{v}|$ = const, ω = const), iar direcția și sensul lui $\vec{L}$ de asemenea se conservă: $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$ este perpendicular pe planul cercului (fig. 3.6).

c) În mișcarea unei planete în jurul Soarelui, forța asupra planetei trece permanent prin centrul Soarelui (forța de atracție gravitațională), deci momentul ei față de Soare este permanent zero și atunci *momentul cinetic al planetei față de Soare se conservă*, deși orbita nu este în general circulară, *ci eliptică*, Soarele aflîndu-se într-unul din focarele elipsei (fig. 3.7).

Momentul cinetic definit mai sus se mai numește și moment cinetic *orbital* sau extern, deoarece este legat de mișcarea particulei pe o orbită (traiectorie), spre deosebire de momentul cinetic *propriu* sau intern, numit și *spin* la particule elementare.

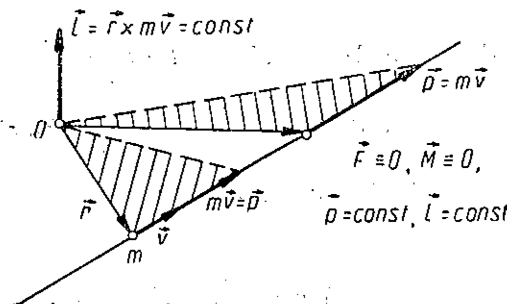


Fig. 3.4

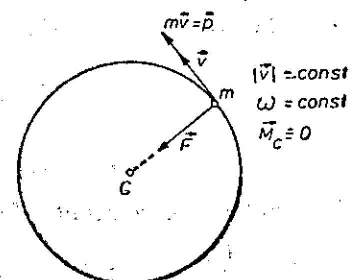


Fig. 3.5

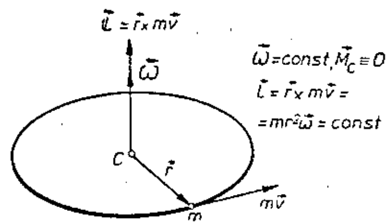


Fig. 3.6

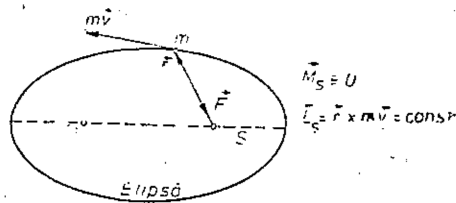


Fig. 3.7

Momentul cinetic este şi el o măsură a mişcării (din punctul de vedere al rotaţiei) : Teorema momentului cinetic exprimă o lege de conservare a mişcării mecanice, *transmise* de la un corp la altul prin intermediul forţei în procesul interacţiunii. Existenţa mărimii fizice moment cinetic şi a legii fizice de conservare a momentului cinetic este legată de proprietatea de *izotropie* a spaţiului (simetria la rotaţii).

Observaţie. În mecanica *cuantică* se arată, şi experienţa confirmă, că în domeniul *atomic* se manifestă caracterul discret, cuantificat al momentului cinetic :

$$L_z = l\hbar, \qquad l = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

$$\left(\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0545 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}\ (h - \text{constanta Planck}).\right. \qquad (3.12)$$

Spinul poate avea şi valori semiîntregi (multipli de $\hbar/2$).

3.4. LUCRUL MECANIC. PUTEREA

3.4.1. LUCRUL MECANIC

Forţele pot produce deplasări ale corpurilor pe o direcţie oarecare. O măsură a efectului *util* al forţei în acest proces este dată de *lucrul mecanic, definit prin produsul dintre deplasare şi componenta forţei pe direcţia deplasării*, deoarece componenta normală a forţei nu poate contribui la deplasarea dată (fapt observat încă de Euler) (fig. 3.8). Astfel, **lucrul mecanic** *este definit prin produsul scalar dintre forţa care acţionează asupra punctului material şi deplasare :*

$$\mathrm{d}W \overset{\text{def}}{=} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\vec{v}\,\mathrm{d}t,\ W \overset{\text{def}}{=} \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z) =$$

$$= \int (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z)\mathrm{d}t, \qquad (3.13)$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{i}\mathrm{d}x + \vec{j}\mathrm{d}y + \vec{k}\mathrm{d}z.$$

În cazul forţei *constante* (fig. 3.9) :

$$W = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\int \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}\Delta\vec{r} = Fd\cos(\vec{F}, \vec{d}),\ \vec{F} = \text{const}. \qquad (3.14)$$

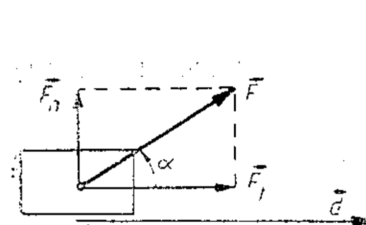


Fig. 3.8

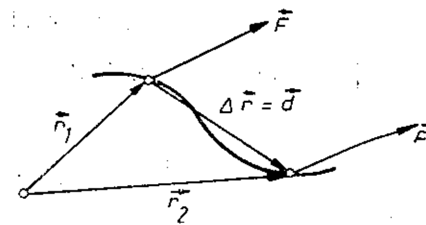


Fig. 3.9

Dacă forţa este tot timpul perpendiculară pe direcţia deplasării, lucrul mecanic efectuat de forţă este nul. Prin urmare, într-o mişcare curbilinie numai componenta *tangenţială* a forţei efectuează lucru mecanic, şi nu componenta normală.

Pentru unitatea de lucru mecanic rezultă :

$$[W] = [F][d] = L^2MT^{-2} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 1\ \text{J în SI} \qquad (3.15)$$

sau

$$[W] = 1\ \text{g}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2 = 1\ \text{erg} = 10^{-7}\ \text{J în CGS}. \qquad (3.16)$$

Unitatea de lucru mecanic (1 J) este egală cu lucrul mecanic efectuat de o forţă unitate (1 N) pe un drum egal cu unitatea (1 m) în direcţia forţei. O unitate des folosită este kilowatora :

$$1\ \text{kWh} \equiv 1\ \text{kW}\cdot 1\ \text{h} = 3.6\cdot 10^6\ \text{J}. \qquad (3.17)$$

3.4.2. PUTEREA

Acelaşi lucru mecanic poate fi efectuat în diferite intervale de timp. Definim *puterea medie* în intervalul de timp Δt prin raportul dintre lucrul mecanic W efectuat în acest interval şi intervalul Δt :

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t} \qquad (3.18)$$

şi puterea instantanee sau momentană :

$$P \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \qquad (3.19)$$

Dacă lucrul mecanic este efectuat uniform, limita din (3.19) coincide cu raportul (3.18). Ţinînd seama de (3.13), rezultă

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}, \qquad (3.20)$$

adică *puterea dezvoltată de o forţă este egală cu produsul scalar dintre forţă şi viteză.*

Pentru *unitatea de putere* rezultă:

$$[P] = [W]/[t] = L^2MT^{-3} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s în SI} \quad (3.21)$$

sau

$$[P] = 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ erg/s în CGS}.$$

În sistemul MKfS:

$$[P] = 1 \text{ kg m/s} = 1 \text{ kgf}\cdot\text{m/s} = 9{,}80665 \text{ W}. \quad (3.22)$$

În sfîrşit, o unitate tolerată este calul putere:

$$1 \text{ CP} = 75 \text{ kgm/s} = 736 \text{ W}. \quad (3.23)$$

3.5. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

Înmulţind ecuaţia (3.1) scalar cu $d\vec{r} = \vec{v}dt$, obţinem

$$dW = \vec{F}d\vec{r} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}\vec{v}dt = \vec{v}d(m\vec{v}) = \vec{v}^{\,2} dm + m\vec{v}d\vec{v} = v^2 dm + mv dv, \quad (3.24)$$

unde $\vec{v}^{\,2} = \vec{v}\,\vec{v} = v^2$, care prin diferenţiere dă $\vec{v}\,d\vec{v} = v\,dv$.

Spre deosebire de celelalte două teoreme, nu putem înainta aici mai departe fără a cunoaşte concret dependenţa masei de viteză. În mecanica clasică $m = \text{const}$, astfel încît

$$dW = \vec{F}\,d\vec{r} = mv\,dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_c, \; m = \text{const}, \quad (3.25)$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} \quad (3.26)$$

unde

$$E_c \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \; m = \text{const}, \quad (3.27)$$

se numeşte *energie cinetică* a punctului material (în mecanica relativistă se obţine o altă expresie pentru energie cinetică).

Teorema energiei cinetice. *Lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă, aplicată punctului material, este egal cu variaţia energiei cinetice a punctului material.*

Dacă rezultanta forţelor aplicate este permanent nulă, energia cinetică a punctului material se conservă: un punct material nu-şi poate modifica energia sa cinetică decît sub acţiunea unei forţe aplicate lui.

Energia cinetică este egală cu lucrul mecanic cheltuit pentru a aduce particula din repaus pînă la viteza v sau altfel spus, cu lucrul mecanic necesar pentru a opri particula sau, în fine, cu lucrul mecanic restituit de particulă la oprirea sa.

Energia cinetică este o *măsură* scalară (de tip temporal) a mişcării. Existenţa mărimii fizice energie cinetică şi a legii fizice de conservare a energiei cinetice este legată de proprietatea de *omogenitate a timpului* (simetria la translaţii temporale).

Mişcarea mecanică se transmite de la un corp la altul în procesul *interacţiunii* lor prin intermediul forţei. Impulsul forţei $\vec{H} = \int_1^2 \vec{F}\,dt$, impulsul momentului forţei $\vec{K} = \int_1^2 \vec{M}\,dt = \int_1^2 (\vec{r} \times \vec{F})dt$ şi lucrul mecanic al forţei $W = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}$ măsoară cantitativ mişcarea mecanică transmisă, fiind egale respectiv cu variaţia cantităţii de mişcare $\vec{p} = m\vec{v}$, a momentului cinetic $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ şi a energiei cinetice $E_c = mv^2/2$ a punctului material.

Impulsul ca măsură a mişcării a fost introdus în mecanică de Descartes (1644), iar energia cinetică (de fapt „forţa vie" mv^2) de Leibniz (1686).

Observăm că *există* în general o funcţie $L(\vec{r}, \vec{v})$ (Lagrange), astfel încît impulsul şi energia particulei se exprimă astfel:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{grad}_{\vec{v}} L, \quad E = \vec{p}\,\vec{v} - L. \quad (3.28)$$

unde pentru particula *liberă*:

$$L = mv^2/2 = E_c, \quad \text{dacă } m = \text{const} \quad (3.29)$$

(în mecanica relativistă expresia lagrangeanului este alta).

3.6. ENERGIA POTENŢIALĂ

3.6.1. FORŢE CONSERVATIVE

Fie punctul material într-un cîmp de forţe $\vec{F}(\vec{r})$. Există cîmpuri de forţe, numite *conservative*, de exemplu, cîmpul gravitaţional sau cîmpul electrostatic, pentru care lucrul mecanic efectuat de forţele cîmpului asupra punctului material *nu depinde* de traiectorie sau de viteza punctului, ci numai de poziţiile iniţială şi finală. Atunci lucrul mecanic efectuat de cîmp asupra punctului material pe o traiectorie *închisă* este *nul* (fig. 3.10):

$$W_{1a2} = W_{1b2}, \; W_{1a2} - W_{1b2} = 0, \; W_{1a2} + W_{2b1} = 0,$$

$$W_{1a2b1} = 0 \text{ sau } \oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0. \quad (3.30)$$

Reciproc, se poate lua această proprietate drept definiţie a cîmpului conservativ:

Un cîmp de forţe este **conservativ** *dacă lucrul mecanic efectuat de forţele cîmpului asupra punctului material este zero pe un drum* **închis**.

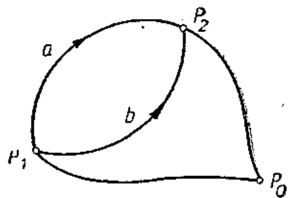


Fig. 3.10

3.6.2. ENERGIA POTENŢIALĂ

Alegînd un punct de referinţă fix arbitrar P_0 (adesea la infinit), numim **energie potenţială** a *punctului material într-un punct $P(\vec{r})$ lucrul mecanic, cu semn schimbat, efectuat de forţele cîmpului pentru a* **aduce** *punctul material din punctul de referinţă P_0 în punctul considerat P* sau *lucrul mecanic efectuat de forţele cîmpului pentru a deplasa punctul material din $P(\vec{r})$ în punctul de referinţă P_0*:

$$U(\vec{r}) \overset{\text{def}}{=} -\int_{P_0}^{P} \vec{F} d\vec{r} = +\int_{P}^{P_0} \vec{F}\, d\vec{r},\quad dU \overset{\text{def}}{=} -\vec{F}\, d\vec{r}. \tag{3.31}$$

Atunci lucrul mecanic efectuat de cîmp între două puncte $P_{1,2}$ va fi egal cu minus variaţia energiei potenţiale între acele puncte:

$$W = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r} = \int_1^0 \vec{F}\, d\vec{r} + \int_0^2 \vec{F}\, d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = -\Delta U, \tag{3.32}$$

ceea ce se obţine şi direct prin integrarea relaţiei $\vec{F} d\vec{r} = -dU$.

Invers, cunoscînd energia potenţială $U(\vec{r})$ putem calcula prin *derivare* forţele (forţele derivă din energie potenţială, precum cîmpul din potenţial):

$$-dU = \vec{F}\, d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz,$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \text{grad } U \cdot d\vec{r}, \tag{3.33}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \equiv -\partial_x U,\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \equiv -\partial_y U,\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \equiv -\partial_z U,$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}},$$

adică *forţa este gradientul cu semn schimbat al energiei potenţiale* (gradientul unui scalar este un vector ale cărui componente sînt derivatele parţiale ale scalarului).

3.6.3. SUPRAFEŢE ECHIPOTENŢIALE. LINII DE FORŢĂ

Suprafeţele pe care U = const se numesc **suprafeţe echipotenţiale.**

Dacă ne deplasăm pe o astfel de suprafaţă $dU = 0$, dar $dU = -dW = -\vec{F}\, d\vec{r}$, deci $dW = 0$ şi $\vec{F} \perp d\vec{r}$, adică lucrul mecanic este nul, iar *forţa $\vec{F}$ este perpendiculară pe suprafeţele echipotenţiale şi îndreptată în sensul* **descreşterii** *energiei potenţiale* (fig. 3.11). (Gradientul unui scalar este totdeauna perpendicular pe suprafeţele pe care scalarul este constant şi îndreptat în sensul creşterii scalarului).

Liniile de forţă *sînt curbele de-a lungul cărora vectorul forţă este tangent; ele sînt normale pe suprafeţele echipotenţiale.*

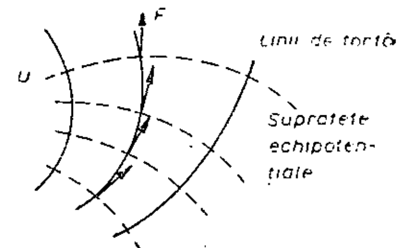


Fig. 3.11

3.7. CONSERVAREA ENERGIEI MECANICE

Să considerăm mişcarea particulei într-un cîmp de forţe *conservative*. Atunci, aplicînd teorema energiei cinetice (3.26), obţinem

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = -\Delta U = U_1 - U_2, \text{ (fiindcă } W = -\Delta U),$$

$$\Delta E_c + \Delta U = \Delta(E_c + U) = 0,\ E_c + U = E = \text{const}, \tag{3.34}$$

$$E_{c1} + U_1 = E_{c2} + U_2 = E = \text{const}.$$

Aceasta este **teorema conservării energiei mecanice,** adică a energiei cinetice şi potenţiale:

Într-un cîmp de forţe conservative are loc în timpul mişcării o transformare reciprocă a energiei cinetice şi potenţiale a particulei, suma lor rămînînd constantă.

Pentru un cîmp de forţe *neconservative* (disipative), cînd lucrul mecanic depinde de traiectorie şi de modul de mişcare, nu există energie potenţială, şi atunci energia *mecanică* (cinetică) nu se conservă, ci se transformă în alte forme de energie nemecanice. De exemplu, în cazul forţelor de *frecare*, cînd lucrul mecanic depinde de lungimea drumului şi nu este nul pe un drum închis, energia mecanică se transformă în căldură (se disipează în mediu trecînd în energie internă).

Să presupunem acum că punctul material se află într-un cîmp de forţe conservative $\vec{F}(\vec{r})$ care derivă deci dintr-un potenţial $U(\vec{r})$, şi este supus în acelaşi timp la o forţă neconservativă (disipativă) $\vec{F}'$. Aplicînd din nou teorema energiei cinetice (3.26), obţinem acum

$$W = \int (\vec{F} + \vec{F}')\, d\vec{r} = \Delta E_c = \int \vec{F}\, d\vec{r} + \int \vec{F}'\, d\vec{r} = -\Delta U + W', \tag{3.35}$$

$$W' = \int \vec{F}'\, d\vec{r} = \Delta(E_c + U).$$

Lucrul mecanic al forţelor neconservative (disipative) aplicate punctului material este egal cu variaţia energiei mecanice a punctului material.

De exemplu, lucrul mecanic al forţelor de frecare, care este totdeauna negativ, deoarece forţele de frecare sînt dirijate în sens contrar mişcării, produce o scădere a energiei mecanice, transformînd-o în căldură.

Exemple. a) *Cazul unidimensional.* Fie cazul cînd energia potențială depinde de o singură coordonată (de exemplu, distanța pînă la un centru al forțelor) (fig. 3.12). În absența forțelor disipative (neconservative), energia mecanică totală $E = E_c + U$ se conservă și energia cinetică se obține ca diferența $E_c = E - U$. În figura 3.12, în cazul energiei totale $E = \overline{PM}$ avem: $U = \overline{PN}$ și $E_c = \overline{NM}$. Deoarece totdeauna $E_c \geqslant 0$, punctul material se poate mișca fie numai în „groapa de potențial" AQB $(s_1 \leqslant s \leqslant s_2)$ din care nu poate ieși, fie în regiunea de la C la infinit $(s \geqslant s_3)$ și nu poate escalada „bariera de potențial" BTC.

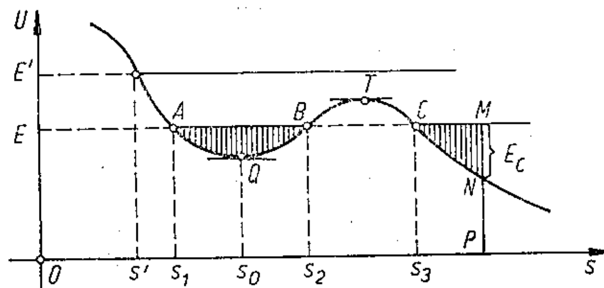


Fig. 3.12

În punctele unde energia potențială U are extreme, derivatele ei, deci forțele (v. 3.33) se anulează și punctul material așezat în *repaus* în aceste puncte va fi în *echilibru*. În cazul *minimului* energiei potențiale, echilibrul este *stabil*, deoarece la o deplasare a mobilului, U ar crește și E_c ar deveni negativă (deci viteza imaginară!) (în fig. 3.12 poziția $Q(s_0)$). Dacă i se imprimă mobilului o viteză mică, el va oscila tot timpul în jurul poziției de echilibru stabil spre deosebire de cazul maximului lui U, cînd mobilul se va depărta de poziția de echilibru instabil (fig. 3.12, poziția T). (L. J. Lagrange 1788, G. L. Dirichlet 1846).

Dacă există frecări, energia mecanică va scădea și oscilațiile particulei se vor amortiza.

b) Pentru *cîmpul gravitațional terestru* în apropierea suprafeței Pămîntului, lucrul mecanic efectuat de forța de greutate $m\vec{g}$ între două puncte $P_{1,2}$ depinde numai de diferența de nivel, astfel încît (fig. 3.13):

$$U = -\int_0^z (-mg)\, dz = mgz. \qquad (3.36)$$

Suprafețele echipotențiale sînt plane orizontale, liniile de forță sînt drepte verticale și forța $m\vec{g}$ este îndreptată în jos, în sensul descreșterii energiei potențiale U:

$$F_x = -\partial_x U = 0, \quad F_y = -\partial_y U = 0, \quad F_z = -\partial_z U = -mg. \qquad (3.37)$$

Dacă avem o suprafață netedă, fără frecare, cu profilul ca în figura 3.12, atunci energia potențială a unui punct material aflat pe această suprafață în cîmpul gravitațional terestru va fi dată de aceeași curbă $U \sim z$, dacă s măsoară distanța pe orizontală. De aceea mișcarea unei particule (săniuțe) pe această suprafață în cîmpul gravitațional terestru va ilustra perfect mișcarea particulei în cîmpul considerat $U(s)$. De aici provin și denumirile: „groapă" de potențial „barieră" de potențial, a „escalada", efect „tunel" etc. Observăm că în mecanica *cuantică*, spre deosebire de mecanica clasică, există o probabilitate nenulă ca particula să treacă prin bariera de potențial BTC din figura 3.12 (*efect „tunel"*).

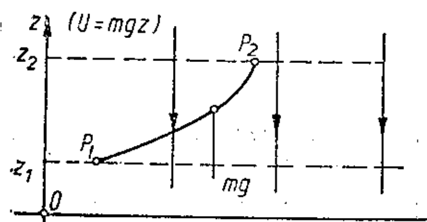


Fig. 3.13

3.8. FORȚELE DE FRECARE

La contactul dintre două solide apar *forțe de frecare*. Ele se datoresc întrepătrunderii asperităților și neregularităților microscopice ale celor două suprafețe care se ating. În planul de contact există, desigur, două forțe de frecare: acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sens opus, una acționează asupra unui corp, iar cealaltă asupra celuilalt corp. Chiar înainte de a începe lunecarea apar forțe de frecare între solide, numite forțe de *frecare statică* sau de *aderență*. În cazul lunecării ele se numesc forțe de *frecare cinetică* sau de frecare la *lunecare*.

Pentru a deplasa un obiect pe podea, de exemplu, un dulap, trebuie să împingem obiectul cu o anumită forță minimă, necesară pentru a-l urni din loc, adică pentru a învinge înțepenirea (aderența) inițială, de repaus. Există deci o forță de frecare statică sau de aderență, *maximă*, f_s. Dar, odată corpul urnit din loc, este necesară o forță *mai mică* pentru a-l menține în mișcare de lunecare, pe podea, adică pentru a învinge forța de frecare cinetică sau de lunecare, $f_c < f_s$ (fig. 3.14).

3.8.1. LEGILE FRECĂRII

Experiențele conduc la următoarele două **legi ale frecării**:

1. *Forța* **maximă** *de aderență f_s și forța de frecare la lunecare f_c între două corpuri nu depind de aria suprafeței de contact dintre corpuri.*

2. *Forța* **maximă** *de aderență f_s și forța de frecare la lunecare f_c sînt proporționale cu forța de apăsare* **normală** *N, care se exercită între corpuri la suprafața lor de contact:*

$$f_s = \mu_s N, \; f_c = \mu_c N, \; f_s > f_c,$$

$$\mu_s > \mu_c, \qquad (3.38)$$

unde μ_s este *coeficientul de aderență*, iar μ_c este *coeficientul de frecare la lunecare*.

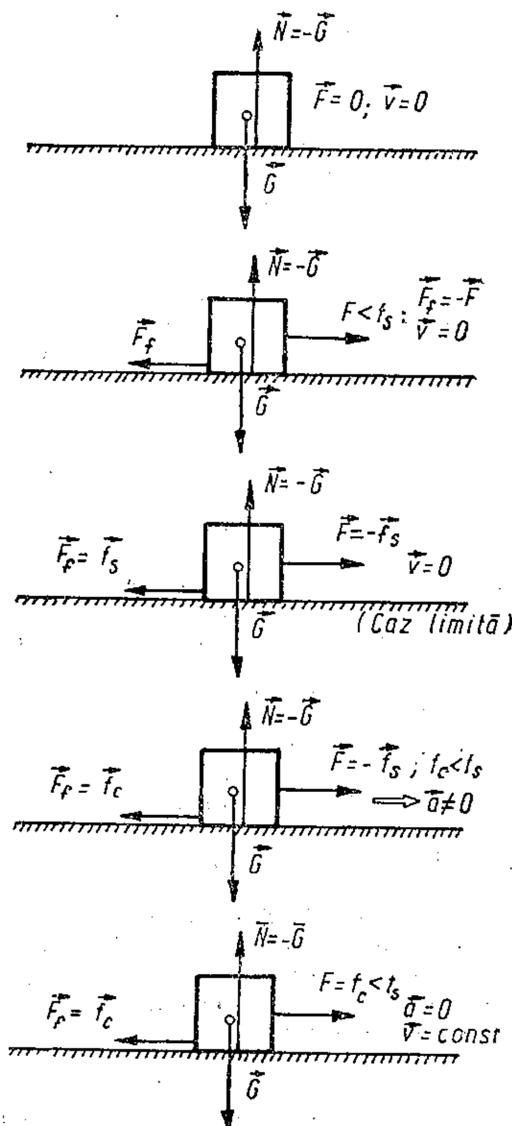


Fig. 3.14

Aceşti coeficienţi de frecare nu depind de aria suprafeţei de contact dintre cele două corpuri (nelubrifiate), ci de natura materialelor şi felul prelucrării suprafeţelor de contact (gradul de şlefuire sau de contaminare cu oxizi sau alte substanţe). Coeficientul μ_c este practic independent de viteza relativă de lunecare a corpului (la început scade puţin cu creşterea vitezei, apoi creşte).

Dacă aşezăm un corp pe un plan înclinat, atunci unghiul maxim de echilibru φ_s este dat de $\text{tg}\,\varphi_s = \mu_s$ şi se numeşte *unghi de aderenţă*. La fel unghiul planului pentru care corpul lunecă *uniform* φ_c este dat de $\text{tg}\,\varphi_c = \mu_c$ şi se numeşte *unghi de frecare la lunecare*.

În probleme de *statică* (echilibru cu frecare) sau de rostogolire *fără lunecare* intervine μ_s, iar în probleme de *cinematică* în care apare *lunecarea* corpurilor intervine μ_c. Uneori deosebirea dintre μ_s şi μ_c poate fi neglijată, deoarece valorile lor sînt apropiate între ele.

Cele două legi ale frecării au fost descoperite experimental de Leonardo da Vinci (1452—1519) şi redescoperite în 1699 de inginerul francez G. Amontons. Ulterior savantul francez Charles A. Coulomb (1736—1806) a efectuat multe experienţe asupra frecării şi a subliniat deosebirea dintre frecarea statică şi cea cinetică. În cinstea lui cele două legi îi poartă numele.

3.8.2. EXPLICAŢIA LEGILOR FRECĂRII

Aceasta rezultă din analiza microscopică a suprafeţelor în contact. Oricît de şlefuite ar fi suprafeţele, ele prezintă nenumărate neregularităţi sau asperităţi microscopice. Atunci aria *reală* a contactului este mult mai mică decît aria *aparentă macroscopică* (poate fi de zece mii de ori mai mică). Această arie reală de contact este proporţională cu apăsarea normală, deoarece vîrfurile neregularităţilor, dacă sînt supuse la apăsare sporită, se deformează plastic (presiunea este foarte mare din cauza ariei mici) şi aria reală de contact creşte practic proporţional cu apăsarea. În cazul lunecării aceste contacte-suduri dintre suprafeţe sînt rupte şi se formează continuu altele noi. La rostogolire asperităţile sînt mai degrabă „netezite“ sau „călcate“, decît rupte ca în cazul lunecării, de aceea *frecarea la rostogolire este mult mai mică* (de sute de ori), decît frecarea la lunecare (aşa se explică rolul rulmenţilor).

Este bine cunoscut rolul frecării în natură şi în tehnică.

3.9. PROBLEMELE DINAMICII PUNCTULUI MATERIAL

În mecanica punctului material se pun următoarele două probleme:

I. *Cunoscînd legea de mişcare a punctului material, să se determine forţa sub acţiunea căreia se produce această mişcare.*

Problema se rezolvă prin *derivarea* succesivă a ecuaţiilor cinematice ale mişcării. Întîi se obţin componentele vitezei, apoi ale acceleraţiei. Înmulţind acestea din urmă cu masa, obţinem componentele *forţei*.

II. **Problema fundamentală.** *Cunoscînd forţa care acţionează asupra punctului material, poziţia iniţială şi viteza iniţială, să se determine legea de mişcare a punctului material.*

Problema se rezolvă prin *integrarea* succesivă a ecuaţiilor diferenţiale ale dinamicii punctului material:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \text{ sau } m\ddot{x} = F_x,\ m\ddot{y} = F_y,\ m\ddot{z} = F_z, \qquad (3.39)$$

în care forţa este în general funcţie de coordonate (poziţie), timp şi viteză: $\vec{F}(\vec{r}, t, \vec{v})$. La aceste ecuaţii se adaugă de obicei anumite condiţii restrictive pentru mişcare şi anumite condiţii pentru forţe, de exemplu pentru forţele de frecare ($F_f = \mu N$).

Pentru a stabili corect forţele trebuie în primul rînd precizat bine *sistemul fizic pe care-l studiem*. Apoi îl izolăm mintal de mediul înconjurător şi reprezentăm acţiunea mediului asupra corpului prin forţele corespunzătoare: se spune că „eliberăm“ corpul de legăturile sale (cu mediul), dar introducînd *reacţiunile* respective *ale legăturilor*. Obţinem astfel corpul „liber“, supus la forţele corespunzătoare, şi putem aplica legile mecanicii (alegînd convenabil un SC).

Oricare forţă pe care o reprezentăm trebuie să fie exercitată neapărat de un corp din mediul înconjurător. Pentru a nu greşi, este bine să urmărim următoarele trei categorii de forţe:

— forţe exercitate prin *cîmp*, de exemplu greutatea $m\vec{g}$ (forţa electrică $q\vec{E}$ etc.);

— forţe *active de tracţiune* sau împingere prin fire sau tije;

— forţe de *contact* cu alte corpuri.

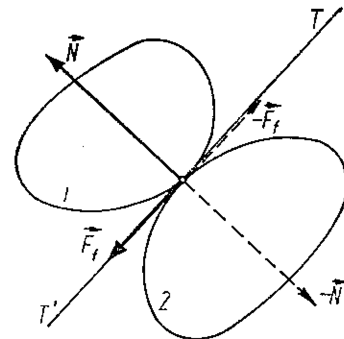


Fig. 3.15

La *contactul* a două corpuri solide apar totdeauna *două* forţe: *reacţiunea normală* $\vec{N}$ şi *forţa de frecare* $\vec{F}_f$ (fig. 3.15). Reacţiunea normală $\vec{N}$ se datoreşte deformării elastice a corpului din mediul înconjurător cu care corpul nostru studiat este în contact. Forţa de frecare se opune deplasării corpului şi este:

$$\left.\begin{aligned} &\text{— în cazul nealunecării: } 0 \leqslant F_f \leqslant f_s = \mu_s N, \\ &\text{— în cazul lunecării: } F_f = f_c = \mu_c N. \end{aligned}\right. \qquad (3.40)$$

Dacă corpul este în contact cu un fluid, atunci rolul reacţiunii normale îl joacă forţa arhimedică (verticală), iar forţa de frecare va fi forţa de rezistenţă (funcţie de viteză), întîmpinată de corp la înaintare.

Exemple. Să considerăm cîteva cazuri simple de mişcare *rectilinie*.

a) Forţa depinde numai de *timp*. Se poate aplica direct teorema impulsului:

$$mv - mv_0 = \int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t, \qquad v = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t = v(t), \qquad (3.41)$$

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t, \qquad x = x_0 + \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = x(t).$$

b) Forţa depinde numai de *poziţie*. Se poate aplica direct teorema energiei cinetice:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x)\,\mathrm{d}x, \qquad v = \pm\left[v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^x F(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} = v(x),$$

$$\left(v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^x a(x)\,\mathrm{d}x = v_0^2 + 2\langle a\rangle(x - x_0) \text{ — formula Galilei}\right). \qquad (3.42)$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v}, \qquad t = \int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}x}{v(x)} = t(x),$$

de unde se poate exprima $x = x(t)$.

c) Forța depinde numai de *viteză*:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v), \qquad dt = \frac{m dv}{F(v)}, \qquad t = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)} = t(v). \tag{3.43}$$

Dacă se poate determina de aici $v = v(t)$, atunci continuăm integrarea:

$$dx = v dt, \qquad x = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x(t). \tag{3.44}$$

Altfel, determinăm $x = x(v)$:

$$F\,dx = m\frac{dv}{dt}dx = mv\,dv, \qquad dx = \frac{mv\,dv}{F(v)},$$
$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{F(v)} = x(v). \tag{3.45}$$

Eliminînd v din (3.44–45), putem obține ecuația mișcării $x = x(t)$.

3.10. OSCILATORUL ARMONIC

În baza legii fundamentale, ținînd seama de expresia accelerației (1.72), avem

$$F = ma = m\ddot{x} = -m\omega^2 x = -kx, \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{3.46}$$

adică *forța este proporțională cu elongația și îndreptată spre centrul atractiv.* Reciproc, se poate lua această lege a forței $F = -kx$ pentru definirea mișcării oscilatorii armonice.

Perioada se exprimă prin constanta cvasielastică $k = m\omega^2$ astfel:

$$k = m\omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3.47}$$

Energia potențială a punctului material în cîmpul forței elastice $F = -kx$ este

$$U = -\int_0^x F\,dx = -\int_0^x(-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2 \tag{3.48}$$

și se reprezintă deci printr-o *parabolă* (fig. 1.16).

Energia mecanică a punctului material *se conservă:*

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \alpha), \qquad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \alpha), \tag{3.49}$$

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}m(v^2 + \omega^2x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.} \tag{3.50}$$

Energia cinetică se transformă permanent în energie potențială și reciproc. În punctele extreme $E_c = 0$ și U este maximă, iar în centrul mișcării $U = 0$ și E_c este maximă.

O forță *constantă* $\vec{F}$ (de exemplu, $m\vec{g}$) aplicată oscilatorului armonic nu face decît să deplaseze punctul de echilibru cu F/k.

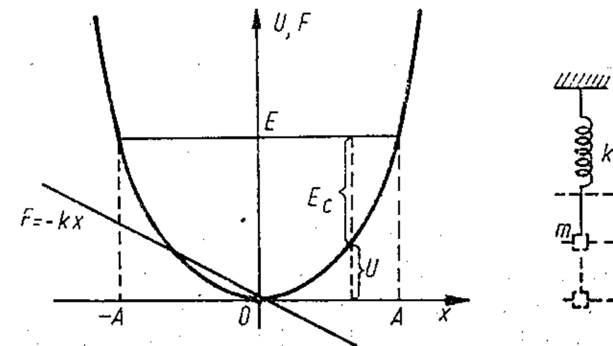


Fig. 3.16

Exemplu: Un corp de masă m suspendat pe un resort elastic de constantă k oscilează vertical cu un oscilator armonic.

Observație. În mecanica *cuantică* se arată că energia totală E a unui oscilator armonic este *cuantificată*, adică poate lua un șir *discret* de valori:

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.51}$$

$\hbar = h/2\pi = 1{,}0545 \cdot 10^{-34}$ J·s (h — constanta Planck).

3.11. PENDULUL GRAVITAȚIONAL SIMPLU (MATEMATIC)

Pendulul gravitațional simplu este un punct material suspendat printr-un fir inextensibil de masă neglijabilă, care poate oscila într-un plan vertical în jurul punctului de suspensie sub acțiunea greutății sale (fig. 3.17). Forțele de frecare se neglijează.

Alegînd pentru unghiul de deviere θ sensul pozitiv cel trigonometric și axa Oz perpendicular pe figură spre cititor, momentul forței și momentul cinetic față de punctul de suspensie O se scriu astfel:

$$M_z = M = -mgl\sin\theta, \; L_z = L = mvl = m\dot{\theta}l^2 \tag{3.52}$$

(tensiunea din fir F nu dă moment față de O). Ecuația (3.10) dă atunci

$$M_z = \dot{L}_z, \; -mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta},$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{3.53}$$

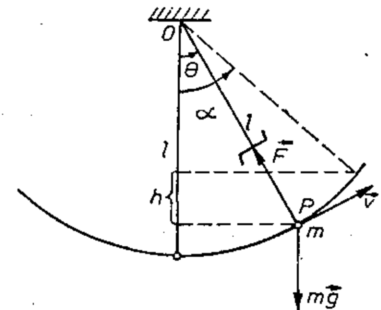


Fig. 3.17

unde masa m s-a simplificat, deci oscilațiile nu depind de masa punctului material. Ecuația poate fi rezolvată imediat pentru oscilații sub unghiuri mici $\theta \ll 1$ rad ($\theta < 6°$). Atunci $\sin\theta \approx \theta$ (în rad) și obținem ecuația oscilatorului armonic:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \text{ sau } \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,\ \theta = \alpha\cos(\omega t + \varphi), \tag{3.54}$$

de unde rezultă (a nu se confunda frecvența unghiulară ω cu viteza unghiulară momentană $\dot{\theta}$):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.55}$$

și legile cunoscute ale pendulului simplu:

1. **Legea substanței.** Perioada nu depinde de masa și natura substanței punctului material (indiferent de amplitudine).

2. **Legea izocronismului** oscilațiilor *mici*. Oscilațiile *mici* sînt *izocrone*, adică perioada oscilațiilor *mici* ($\theta < 6°$) nu depinde de *amplitudinea* lor unghiulară.

3. **Perioada oscilațiilor** este direct proporțională cu rădăcina pătrată din lungimea pendulului și invers proporțională cu rădăcina pătrată din accelerația gravitațională.

Aplicație

Putem calcula ușor și *tensiunea F din fir* (pentru orice amplitudine α de oscilație), scriind ecuația fundamentală $\vec{F} = m\vec{a}$ pe direcția radială:

$$F - mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{l}. \tag{3.56}$$

Dar din conservarea energiei mecanice:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgl(\cos\theta - \cos\alpha), \tag{3.57}$$

de unde

$$F = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha). \tag{3.58}$$

Tensiunea din fir este maximă pentru $\theta = 0$, adică în momentul cind firul trece prin poziția verticală:

$$F_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha). \tag{3.59}$$

În particular pentru oscilații cu amplitudinile $\alpha = 60°$ și $90°$ (binințeles, oscilațiile nu mai sint armonice) avem

$$F_{max} = 2mg,\ (\alpha = 60°) \text{ și } F_{max} = 3mg,\ (\alpha = 90°). \tag{3.60}$$

Tensiunea din fir este minimă în pozițiile extreme: $F_{min} = mg\cos\alpha$.

3.12. MIȘCAREA CIRCULARĂ

În mișcarea circulară oarecare, forța are componentele (fig. 3.18):

$$\vec{F} = m\vec{a},\ F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}, \quad (F_t = m\dot{v} = m\ddot{s}) \tag{3.61}$$

sau $F_t = m\varepsilon R = m\dot{\omega}R = m\ddot{\theta}R$,

$F_n = ma_n = mv^2/R = m\omega^2R = m\omega v$,

vectorial:

$$\vec{F}_t = m\vec{\varepsilon} \times \vec{R},\ \vec{F}_n = m\vec{\omega} \times \vec{v} = -m\omega^2\vec{R} = -\frac{mv^2}{R^2}\vec{R}, \tag{3.62}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{3.63}$$

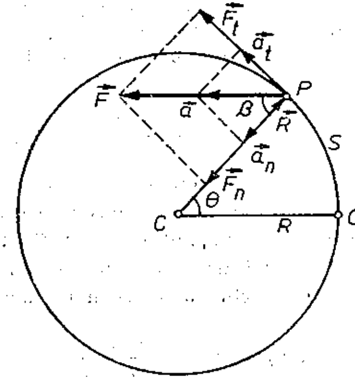


Fig. 3.18

Forța $\vec{F}(F_t, F_n)$ poate fi de orice natură: elastică (fir întins, roți), gravitațională (planete, sateliți), electrostatică (electroni în atom în modelul Bohr), forța de frecare solid-solid (autovehicule pe șosea) etc.

În mișcarea circulară *uniformă* v = const (dar $\vec{v} \neq$ const), deci $a_t = \dot{v} = 0$ (dar $a_n = v^2/R$) și $F_t = 0$ ($\beta = 0$) — accelerația este centripetă și forța este centripetă.

PROBLEME

3.1. Pe o masă este întins un lanț. Un capăt al lanțului, de care este prins un corp greu de dimensiuni neglijabile, atîrnă liber peste marginea mesei. Cînd porțiunea de lanț de pe masă are lungimea l_0, lanțul începe să lunece cu frecare de pe masă. Să se calculeze viteza lanțului în momentul cînd el părăsește masa.

R. $v = \sqrt{gl_0}$.

3.2. Un tren începe să frîneze uniform, parcurgînd o distanță $s_m = 180$ m pînă la oprire. Un pendul simplu suspendat în vagon a deviat cu un unghi *maxim* $\alpha_m = 10°$ după începerea frînării. Care a fost viteza inițială a trenului?

R. $v_0 = \sqrt{2gs_m\,\mathrm{tg}(\alpha_m/2)} = 17{,}5$ m/s².

3.3. Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două corpuri identice de masă m fiecare, atîrnate la capete. Peste unul din corpuri este așezat un corp adițional de masă Δm și în firul de suspensie respectiv este intercalat un resort fin de constantă elastică k. Să se calculeze: **a)** Diferența $R_0 - R$ dintre apăsarea statică și cea dinamică exercitată de scripete asupra lagărelor sale; **b)** apăsarea f exercitată de corpul adițional Δm asupra corpului pe care este așezat; **c)** alungirea suplimentară Δx a resortului în timpul mișcării.

R. a) $R_0 - R = \frac{(\Delta m)^2 g}{2m + \Delta m}$; b) $f = \frac{2gm\Delta m}{2m + \Delta m}$; c) $\Delta x = -g\frac{(m + \Delta m)\Delta m}{k(2m + \Delta m)}$.

3.4. Cu ce accelerație trebuie să coboare un automobil de masă M pe deasupra unei scînduri de masă m așezată pe un plan înclinat de unghi α, pentru ca scîndura să lunece uniform în sus pe planul înclinat ? Coeficientul de frecare între scîndură și planul înclinat este μ.

R. $a = g(1 + m/M)\ (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

3.5. Variind înclinarea unui plan înclinat s-a găsit că un corp așezat pe acest plan rămîne în repaus pînă la un unghi maxim egal cu $\varphi = 30°$. Fixînd înclinarea la un unghi $\alpha = 45°$ s-a găsit că viteza limită de lunecare liberă a corpului în jos pe plan atinge valoarea $c = 4{,}0$ m/s, forța de rezistență a aerului fiind proporțională cu pătratul vitezei corpului. Lansînd acum corpul cu viteza inițială $v_0 = 2{,}0$ m/s în sus pe planul înclinat (cu $\alpha = 45°$), să se afle cu ce viteză se întoarce corpul înapoi la baza planului.

R. $v'^2 = v_0^2 \dfrac{1}{v_0^2/c^2 + \sin(\alpha + \varphi)/\sin(\alpha - \varphi)}$, $v' = 1{,}0$ m/s.

3.6. Un pendul simplu de masă m este fixat într-un cărucior care: **a)** urcă, respectiv coboară, cu o accelerație constantă a pe un plan înclinat de unghi α; **b)** urcă sau coboară liber pe acel plan, unghiul de frecare fiind φ. Să se afle: unghiul de deviere θ al firului de suspensie față de verticală și tensiunea R din fir în poziția de echilibru relativ a pendulului, precum și perioada micilor oscilații în jurul poziției de echilibru relativ.

R. a) $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-a\cos\alpha}{g \pm a\sin\alpha}$, $\quad R = m\sqrt{g^2 + a^2 \pm 2ga\sin\alpha}$,

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{R}}$; $\quad$ b) $\theta = \varphi \pm \alpha$, $R = mg\dfrac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$, $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\varphi}{g\cos\alpha}}$.

3.7. Un corp suspendat de un resort oscilează cu perioada $T_1 = 0{,}50$ s. Adăugînd un corp suplimentar, perioada devine $T_2 = 0{,}60$ s. Cu cît a coborît centrul de oscilații ?

R. $\Delta x = \dfrac{g}{4\pi^2}\ (T_2^2 - T_1^2) = 2{,}7$ cm.

3.8. Un punct material execută oscilații mici pe o curbă netedă situată în planul vertical, în jurul minimului curbei, sub acțiunea greutății. Să se arate că perioada oscilațiilor mici este

$$T = 2\pi\sqrt{R_0/g},$$

unde R_0 este raza de curbură a curbei în punctul de minim.

3.9. O particulă se mișcă pe o axă orizontală Ox într-un cîmp de forță, dependent de coordonată, conform graficului din figura 3.19 ($F_0 = 10$ N). Asupra particulei acționează de asemenea și o forță de frecare, cu $|\vec{F}_f| < F_0$. Particula pleacă din punctul A de abscisă $x_0 = 0{,}10$ m, fără viteză inițială.

a) Să se calculeze căldura degajată prin frecare, pînă la oprirea particulei.

b) Considerînd $|\vec{F}_f| =$ const, să se reprezinte, calitativ, viteza particulei în funcție de coordonată (traiectoria în spațiul fazelor).

R. a) Particula se mișcă în groapa de potențial $U = F_0|x|$ (fig. 3.20), $Q = F_0x_0 = 1{,}00$ J ;
b) figura 3.21.

3.10. O barcă de masă m întîmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei, cu constanta de proporționalitate k. După cît timp viteza inițială v_0 a bărcii se micșorează de n ori ?

R. $\tau = \dfrac{m(n-1)}{kv_0}$.

3.11. O barcă cu motor întîmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. În momentul cînd viteza bărcii este $v_0 = 10$ m/s, motorul este oprit și după

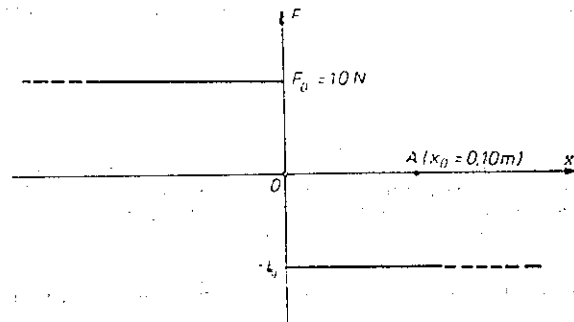


Fig. 3.19

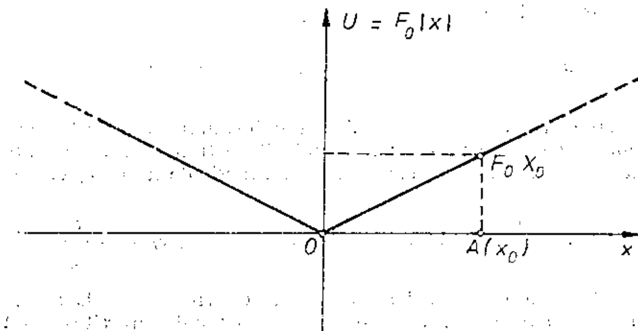


Fig. 3.20

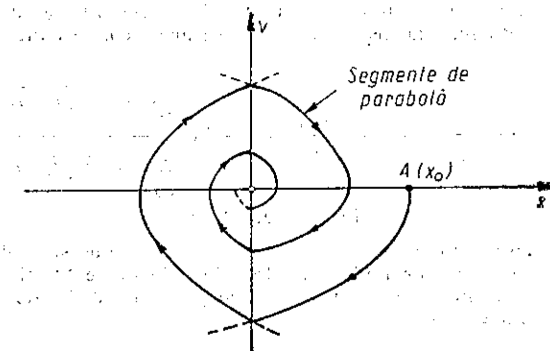


Fig. 3.21

un timp $\tau = 17{,}2$ s viteza bărcii devine de e ori mai mică (e = baza logaritmilor naturali). Să se calculeze distanța parcursă de barcă în acest timp.

R. $x_m = \frac{\tau v_0}{e - 1} = 100$ m.

3.12. O barcă de masă $m = 100$ kg întîmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu viteza. În momentul cînd viteza bărcii este $v_0 = 1{,}00$ m/s motorul este oprit și după un timp $\tau = 10$ s viteza bărcii se micșorează de e ori (e = baza logaritmilor naturali). Să se afle: a) constanta de proporționalitate din legea forței de rezistență; b) distanța parcursă în timpul indicat; c) distanța parcursă pînă la oprire.

R. a) $k = \frac{m}{\tau} = 10$ kg/s; b) $x = \tau v_0 \frac{e - 1}{e} = 6{,}3$ m; c) $x_m = \tau v_0 = 10$ m.

3.13. O particulă cade liber în aer fără viteză inițială. Ea întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. Să se calculeze după cît timp particula atinge 99% din viteza sa limită de cădere liberă, care este $c = 4{,}9$ cm/s.

R.
$$t = 2{,}3 \cdot \frac{2c}{g} = 23 \text{ ms}.$$

3.14. O particulă cade în aer fără viteză inițială și întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. Știind viteza limită de cădere liberă c, să se exprime viteza și coordonata particulei în funcție de timp.

R.
$$v = c(1 - e^{-gt/c}), \quad x = ct + \frac{c^2}{g}(e^{-gt/c} - 1).$$

3.15. Un corp cade în aer fără viteză inițială și întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Știind viteza limită de cădere liberă c, să se exprime: a) viteza în funcție de timp; b) coordonata în funcție de timp; c) coordonata în funcție de viteză.

R. a) $v = c\,\text{th}\,\frac{gt}{c}$; b) $x = \frac{c^2}{g}\ln \text{ch}\frac{gt}{c}$; c) $x = \frac{c^2}{2g}\ln\frac{1}{1 - v^2/c^2}$.

3.16. Un corp este aruncat vertical în sus în aer cu viteza inițială v_0. Corpul întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Cunoscînd viteza limită de cădere liberă c, să se afle: a) timpul de urcare t_m și înălțimea maximă h_m la care se ridică corpul; b) timpul de coborîre t' și viteza v' cu care corpul ajunge înapoi pe Pămînt.

R. a) $t_m = \frac{c}{g}\,\text{arc tg}\,\frac{v_0}{c}$, $h_m = \frac{c^2}{2g}\ln(1 + v_0^2/c^2)$;

b) $t' = \frac{c}{g}\ln(v_0/c + \sqrt{1 + v_0^2/c^2})$, $v' = (1/v_0^2 + 1/c^2)^{-1/2}$.

3.17. Într-un jgheab curbat sub formă de circumferință orizontală de rază R lunecă un corp cu coeficientul de frecare μ și viteza inițială v_0. Să se afle: a) coordonata curbilinie s în funcție de viteză; b) viteza inițială necesară pentru ca acest corp să înconjoare complet circumferința.

R. a)
$$s = \frac{R}{2\mu}\left(\text{arg sh}\frac{v_0^2}{Rg} - \text{arg sh}\frac{v^2}{Rg}\right) = \frac{R}{2\mu}\ln\frac{\frac{v_0^2}{Rg} + \sqrt{1 + (v_0^2/Rg)^2}}{\frac{v_0^2}{Rg} + \sqrt{1 + (v^2/Rg)^2}};$$

b) $v_0^2 = Rg\,\text{sh}\,4\pi\mu$.

3.18. Un corp de masă m lunecă pe suprafața interioară a unei sfere de rază R, cu coeficientul de frecare la lunecare μ, pornind fără viteză inițială din extremitatea unui diametru orizontal al sferei. Să se exprime energia cinetică a corpului în funcție de unghiul la centru θ descris de raza vectoare a corpului.

R.
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{1 + 4\mu^2}[3\mu\cos\theta + (1 - 2\mu^2)\sin\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}].$$

3.19. Să se arate că la mișcarea liberă a unei particule în aer, oricare ar fi forța de rezistență a aerului, avem
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_x^2},$$
unde v_x este componenta vitezei pe axa orizontală.

3.20. O particulă este aruncată în aer cu viteza inițială v_0 sub unghiul α_0 față de orizontală. Forța de rezistență din partea aerului este proporțională cu viteza. Cunoscînd viteza limită c de cădere liberă, să se scrie: a) componentele vitezei $v_{x,y}$ în funcție de timp; b) coordonatele x, y în funcție de timp; c) timpul de urcare t_m pînă la înălțimea maximă; d) coordonatele înălțimii maxime; e) ecuația traiectoriei și asimptota ei.

R. a) $v_x = v_0\cos\alpha_0 e^{-gt/c}$, $v_y = (c + v_0\sin\alpha_0)e^{-gt/c} - c$;

b) $x = \frac{c}{g}v_0\cos\alpha_0(1 - e^{-gt/c})$, $y = \frac{c^2}{g}\left(1 + \frac{v_0}{c}\sin\alpha_0\right)(1 - e^{-gt/c}) - ct$;

c) $t_m = \frac{c}{g}\ln\left(1 + \frac{v_0}{c}\sin\alpha_0\right)$; d) $x_m = \frac{v_0^2\sin 2\alpha_0}{2g}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{c}v_0\sin\alpha_0}$;

$$y_m = \frac{c}{g}v_0\sin\alpha_0 - \frac{c^2}{g}\ln\left(1 + \frac{v_0}{c}\sin\alpha_0\right);$$

e) $y = \frac{cx}{v_0\cos\alpha_0}\left(1 + \frac{v_0}{c}\sin\alpha_0\right) + \frac{c^2}{g}\ln\left(1 - \frac{gx}{cv_0\cos\alpha_0}\right)$,

asimptota verticală: $x = \frac{c}{g}v_0\cos\alpha_0$.

3.21. Să se arate că în orice mișcare *plană* a unei particule momentul său cinetic în raport cu o axă oarecare din planul mișcării se conservă și are valoarea zero.

R. Impulsul $m\vec{v}$ este incident sau paralel cu axa, deci $L_{\parallel} = 0$, vectorul $\vec{L}$ față de un pol din plan este perpendicular pe plan.

3.22. La *pendulul conic* (particula descrie un cerc orizontal, iar firul de suspensie, pînza unui con), față de care punct se conservă momentul cinetic al particulei și ce valoare are? Care este variația pe unitatea de timp a momentului cinetic față de punctul de suspensie?

R. a) Față de centrul cercului: $L = mvr = ml\sin^2\alpha\sqrt{gl/\cos\alpha}$, $\vec{L}$ este vertical; b) $|d\vec{L}/dt| = |\vec{M}| = mgr = mgl\sin\alpha$; $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ este tangent la cerc.

3.23. O particulă se mișcă liber, fără frecare, sub acțiunea forței de greutate, pe suprafața interioară a unei sfere. Să se arate că momentul cinetic al particulei în raport cu diametrul vertical al sferei se conservă.

R. $M_{\parallel} = 0$ căci $m\vec{g}$ este paralel, iar $\vec{N}$ este incident cu diametrul vertical.

3.24. Două particule se mișcă rectiliniu uniform cu viteze egale în modul dar în sensuri opuse pe două drepte paralele. Să se arate că momentul cinetic total în raport cu orice punct din spațiu se conservă și nu depinde de alegerea acestui punct.

R. $L = dmv$, unde mv este impulsul unei particule și d — distanța dintre drepte ($\vec{L}$ este perpendicular pe planul mișcării).

3.25. O bilă de masă $m = 100$ g, legată de un centru fix printr-un fir de lungime $l_1 = 60$ cm, execută o mișcare circulară uniformă pe un plan orizontal neted fără frecări cu turația $n_1 = 1{,}00$ rot/s. Ce turație va avea bila dacă firul se scurtează pînă la lungimea $l_2 = 30$ cm? Ce lucru mecanic a efectuat forța care a scurtat firul?

R. $n_2 = n_1 l_1^2/l_2^2 = 4{,}0$ rot/s; $W = \frac{1}{2}m\cdot 4\pi^2 n_1^2 l_1^2(l_1^2/l_2^2 - 1) = 2{,}12$ J.

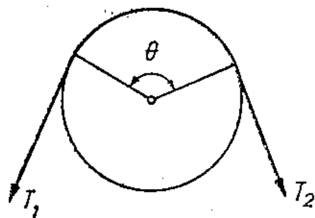


Fig. 3.22

3.26. Peste un cilindru fix este trecut un fir astfel încît unghiul la centru al porțiunii înfășurate este θ (fig. 3.22). Pentru ce raport al tensiunilor din fir, T_2/T_1, firul va începe să lunece, dacă coeficientul de frecare la lunecare dintre fir și cilindru este μ?

Considerînd că $\theta = \pi$ și că la capetele firului atîrnă două corpuri de mase $m_{1,2}$, care este condiția de lunecare și cu ce accelerație se mișcă corpurile dacă această condiție este îndeplinită?

R. $T_2/T_1 = e^{\mu\theta}$, $m_2/m_1 > e^{\pi\mu}$, $a = g\,\dfrac{m_2/m_1 - e^{\pi\mu}}{m_2/m_1 + e^{\pi\mu}}$,

$$T_1 = \frac{2m_2g}{m_2/m_1 - e^{\pi\mu}}, \quad T_2 = \frac{2m_2ge^{\pi\mu}}{m_2/m_1 - e^{\pi\mu}}; \quad T_2 - T_1 = 2m_2g\,\frac{e^{\pi\mu} - 1}{m_2/m_1 + e^{\pi\mu}}.$$

3.27. Un punct material de masă m pornește din repaus (din origine) sub acțiunea forței $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$. Să se scrie legea mișcării.

R. $x = \dfrac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t)$.

3.28. Un lanț de lungime l și masă m este ținut inițial de capătul superior astfel încît capătul său inferior atinge o masă, apoi se lasă să cadă liber. Ce forță va exercita lanțul asupra mesei și ce impuls total transmite el mesei?

R. $F = \dfrac{3}{2}\dfrac{m}{l}g^2t^2, \quad t \leqslant \sqrt{2l/g}; \quad p = \dfrac{2m}{3}\sqrt{2gl}.$

3.29. O particulă lovește perfect elastic (și oblic) o altă particulă identică aflată în repaus. Să se arate că vitezele particulelor după ciocnire sînt perpendiculare între ele.

3.30. Pe o masă cu pernă de aer descrie o mișcare circulară un disc de masă m prins printr-un fir orizontal, trecut printr-un orificiu în masă și tras în jos cu viteza constantă u. Care este tensiunea din fir în funcție de raza r, dacă pentru $r = r_0$ viteza unghiulară era ω_0?

R. $F = m\omega_0^2r_0^4/r^3$.

3.31. Un șlep pornește din repaus tras de o forță orizontală constantă F. El întîmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu: *a)* viteza $(-kv)$; *b)* pătratul vitezei $(-kv^2)$. Să se scrie legea vitezei și legea mișcării.

R. a) $v = \dfrac{F}{k}(1 - e^{-kt/m}), \; x = \dfrac{F}{k}t + \dfrac{Fm}{k^2}(e^{-kt/m} - 1);$

b) $v = \sqrt{\dfrac{F}{k}}\,\mathrm{th}\dfrac{t}{m}\sqrt{kF}, \; x = \dfrac{m}{k}\ln \mathrm{ch}\dfrac{t}{m}\sqrt{kF}, \; x = \dfrac{m}{2k}\ln\dfrac{F}{F - kv^2}.$

3.32. Un glonț pornește cu viteza inițială v_0. El întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu cubul vitezei: $-kv^3$. Neglijînd gravitația, să se afle legea vitezei și legea mișcării.

R. $v = (1/v_0^2 + 2kt/m)^{-1/2}; \; x = \dfrac{m}{k}\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} - \dfrac{m}{kv_0}.$

CAPITOLUL 4

DINAMICA SISTEMULUI MECANIC

Prin **sistem mecanic** vom înțelege un sistem de puncte materiale, care nu sînt independente, ci supuse la legături reciproce, astfel încît formează un „întreg" mai mult sau mai puțin deformabil (R. Boscovich 1758). *Exemple*: un corp considerat ca ansamblu de particule (molecule, ioni), o mașină ale cărei părți pot fi aproximate prin puncte materiale, sistemul solar etc.

Pentru a deduce legile sistemului mecanic nu este nevoie de principii *noi*, ele se deduc din principiile formulate pentru punctul material.

4.1. FORȚELE INTERNE

Asupra fiecărui punct material m_k din sistem se exercită, pe de o parte, forțe *interne* $\vec{\mathcal{F}}_{kl}$ din partea celorlalte puncte materiale m_l ale sistemului și, pe de altă parte, forțe *externe* $\vec{F}_k$ din partea corpurilor externe care nu fac parte din sistem. Forțele interne sînt forțe de interacțiune dintre particulele sistemului (molecule, ioni etc.). Conform principiului III, forța (acțiunea) $\vec{\mathcal{F}}_{kl}$ exercitată de particula m_l asupra particulei m_k este egală în modul și de sens opus cu forța reciprocă (reacțiunea) $\vec{\mathcal{F}}_{lk}$ exercitată de particula m_k asupra particulei m_l:

$$\vec{\mathcal{F}}_{kl} = -\vec{\mathcal{F}}_{lk}, \; (\vec{\mathcal{F}}_{kk} \equiv 0) \text{ sau } \vec{\mathcal{F}}_{kl} + \vec{\mathcal{F}}_{lk} = 0, \tag{4.1}$$

adică forțele interne sînt totdeauna *perechi*, două cîte două egale în modul și de sens opus (forțe de *interacțiune*), de aceea însumate fiind pentru *întregul* sistem dau o *rezultantă nulă*:

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_{k,l} \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0. \tag{4.2}$$

Forța internă rezultantă asupra particulei m_k este:

$$\vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{l=1}^{N} \vec{\mathcal{F}}_{kl}, \quad (N \text{ — numărul total de particule din sistem}) \tag{4.3}$$

şi prin însumarea asupra tuturor particulelor din sistem regăsim (4.2):

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_k \vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{k,l} \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0. \qquad (4.4)$$

Momentul rezultant al forţelor interne este, de asemenea, nul:

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0. \qquad (4.5)$$

În adevăr, ultima sumă este formată din perechi de termeni care dau zero:

$$\vec{r}_1 \times \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{\mathcal{F}}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{\mathcal{F}}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{\mathcal{F}}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{\mathcal{F}}_{12} = 0,$$

deoarece $\vec{r}_1 \times \vec{\mathcal{F}}_{12} = \vec{r}_2 \times \vec{\mathcal{F}}_{12}$ reprezintă momentul aceleiaşi forţe $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ faţă de acelaşi pol O, sau altfel, deoarece $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ este paralel cu $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ (fig. 4.1).

Fig. 4.1

Se poate judeca şi astfel:

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_{kl} = -\sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_{lk} = -\sum_{l,k} \vec{r}_l \times \vec{\mathcal{F}}_{kl}, \qquad (4.6)$$

unde am ţinut seama întîi de (4.1), apoi am schimbat notaţiile indicilor de sumare (indici „muţi"). Luînd semisuma celor două expresii pentru $\vec{\mathcal{M}}$:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \times \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0, \qquad (4.7)$$

deoarece vectorul $\vec{r}_k - \vec{r}_l$ este paralel cu $\vec{\mathcal{F}}_{kl}$.

Teoremă. *Rezultanta forţelor interne şi momentul rezultant al forţelor interne faţă de orice pol sînt nule.*

Lucrul mecanic al forţelor interne *nu* este însă în general nul:

$$\vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_k + \vec{\mathcal{F}}_{lk} d\vec{r}_l = \vec{\mathcal{F}}_{kl} d(\vec{r}_k - \vec{r}_l) = \vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_{kl},$$

$$d\mathcal{W} = \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_k = \frac{1}{2} \sum \vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_{kl}. \qquad (4.8)$$

În cazul corpurilor *rigide* (nedeformabile), distanţele reciproce r_{kl} sînt constante:

$$\vec{r}_{kl}^{\,2} = \text{const} \rightarrow 2\vec{r}_{kl} d\vec{r}_{kl} = 0 \rightarrow d\vec{r}_{kl} \perp \vec{r}_{kl},$$

$$\vec{r}_{kl} \parallel \vec{\mathcal{F}}_{kl} \rightarrow d\vec{r}_{kl} \perp \vec{\mathcal{F}}_{kl} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_{kl} = 0, \qquad (4.9)$$

deoarece $\vec{\mathcal{F}}_{kl}$ este paralel cu $\vec{r}_{kl}$ şi perpendicular pe $d\vec{r}_{kl}$, deci lucrul mecanic (4.8) este nul.

Pentru corpurile rigide (nedeformabile) lucrul mecanic al forţelor interne este nul.

În cazul corpurilor deformabile însă, forţele interne efectuează în general un lucru mecanic de deformare.

4.2. TEOREMA IMPULSULUI TOTAL*

Să aplicăm ecuaţia fundamentală (3.1) fiecărui punct material al sistemului:

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = \frac{d}{dt}\vec{p}_k = \vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k. \qquad (4.10)$$

Prin însumare asupra tuturor punctelor sistemului, obţinem:

$$\frac{d}{dt}\sum_k \vec{p}_k = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_k \vec{\mathcal{F}}_k + \sum_k \vec{F}_k = \sum_k \vec{F}_k = \vec{F}, \qquad (4.11)$$

deoarece $\sum_k \vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{k,l} \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0$.

Teoremă. *Derivata în raport cu timpul a impulsului total $\vec{P}$ al sistemului este egală cu rezultanta $\vec{F}$ a forţelor* **externe** *aplicate sistemului.*

Dacă rezultanta forţelor *externe* este permanent *nulă*, impulsul total al sistemului *se conservă*: Sistemul nu-şi poate schimba impulsul său total decît sub acţiunea unei forţe rezultante *exterioare*, care de fapt transmite impuls din partea corpurilor exterioare, cu care sistemul interacţionează. Forţele *interne* pot doar *redistribui* impulsul între părţile componente ale sistemului (de exemplu, prin *ciocniri* între particulele sistemului).

Sub formă integrată avem:

$$\vec{H} = \int \vec{F} dt = \Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1, \qquad (4.12)$$

analog teoremei impulsului pentru punctul material.

4.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC TOTAL

Să aplicăm ecuaţia fundamentală sub forma (3.10) fiecărui punct material al sistemului:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = \frac{d}{dt}\vec{L}_k = \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k + \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{\mathcal{M}}_k + \vec{M}_k. \qquad (4.13)$$

* Teoremele care urmează sînt valabile în SR inerţiale.

Însumînd după toate punctele sistemului rezultă :

$$\frac{d}{dt}\sum_k \vec{L}_k = \frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}, \quad \vec{J} \overset{\text{def}}{=} \sum_k \vec{L}_k, \quad \vec{M} = \sum_k \vec{M}_k, \tag{4.14}$$

deoarece

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0.$$

Teoremă. *Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total* $\vec{J}$ *al sistemului față de un punct dat (pol) este egală cu momentul rezultant* $\vec{M}$ *al forțelor* **externe** *față de același punct (pol).*

Dacă $\vec{M} \equiv 0$ față de un pol, atunci $\vec{J}$ față de acel pol se conservă, adică rămîne constant în timpul mișcării sistemului. La fel, dacă față de o axă $M_\parallel \equiv 0$, atunci momentul cinetic în raport cu acea axă $J_\parallel$ se conservă. Forțele *interne* pot doar *redistribui* momentul cinetic între particulele componente ale sistemului (de exemplu, prin *ciocniri*).

Prin integrare obținem :

$$\vec{K} = \Sigma\int \vec{r}_k \times d\vec{H}_k = \int \vec{M}\, dt = \Delta\vec{J} = \vec{J}_2 - \vec{J}_1, \tag{4.15}$$

analog teoremei momentului cinetic pentru punctul material.

4.4. TEOREMA ENERGIEI CINETICE TOTALE

Scriem teorema energiei cinetice (3.25) (nerelativist) pentru fiecare punct material al sistemului :

$$d\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k)d\vec{r}_k = d\mathcal{W}_k + dW_k. \tag{4.16}$$

Însumînd pentru toate punctele sistemului și integrînd, obținem

$$d\,\Sigma \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \Sigma\,(\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k)\, d\vec{r}_k = d\mathcal{W} + dW, \tag{4.17}$$

$$\Delta \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \Delta E_c = \sum_k\int (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k)\, d\vec{r}_k = \mathcal{W} + W. \tag{4.18}$$

Teoremă. *Variația energiei cinetice totale a sistemului este egală cu lucrul mecanic efectuat de* **toate** *forțele,* **atît externe, cît și interne.**

Forțele interne pot mări sau micșora energia cinetică totală a sistemului pe seama altor forme de energie (prin intermediul lucrului mecanic al forțelor interne).

Exemple. Prin explozia unui obuz aflat inițial în repaus (deci cu energia cinetică inițială nulă) forțele *interne* creează o energie cinetică a schijelor pe seama energiei chimice. Prin arderea combustibilului unei rachete se creează prin lucrul forțelor interne energia cinetică a rachetei. Un cosmonaut, chiar izolat în stare de imponderabilitate, își poate mișca membrele și instrumentele cu ajutorul forțelor proprii etc.

În cazul solidului rigid, lucrul mecanic $\mathcal{W}$ al forțelor interne este nul și numai forțele externe pot schimba energia sa cinetică.

Sistem conservativ

Un alt caz important este acela cînd *forțele interne sînt conservative*, atunci se poate introduce energia potențială a *sistemului*, funcție numai de *pozițiile* tuturor punctelor materiale ale sistemului, adică funcție numai de *configurația* sistemului :

$$\mathcal{W} = \sum_k \int \vec{\mathcal{F}}_k\, d\vec{r}_k \overset{\text{def}}{=} -\Delta U. \tag{4.19}$$

Teorema energiei cinetice devine în acest caz :

$$\Delta E_c = -\Delta U + \sum_k \int \vec{F}_k\, d\vec{r}_k = -\Delta U + W;$$

$$\Delta(E_c + U) = \sum_k \int \vec{F}_k d\vec{r}_k = W. \tag{4.20}$$

Prin urmare, *variația energiei mecanice, cinetice și potențiale, a unui sistem* **conservativ** *este egală cu lucrul mecanic al forțelor* **externe** *aplicate.* De aici rezultă teorema conservării energiei mecanice (cinetice și potențiale) a unui sistem *conservativ izolat.*

4.5. MIȘCAREA CENTRULUI DE MASĂ

Se numește **centru de masă** *al unui sistem mecanic punctul definit prin vectorul de poziție*

$$\vec{r}_{cm} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k=N} m_k \vec{r}_k, \quad m = \sum_{k=1}^{N} m_k,$$

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\Sigma\, m_k x_k, \quad y_{cm} = \frac{1}{m}\Sigma\, m_k y_k, \quad z_{cm} = \frac{1}{m}\Sigma m_k z_k \tag{4.21}$$

sau pentru o distribuție continuă a masei :

$$\vec{r}_{cm} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm = \frac{1}{m}\int \vec{r}\rho\, dV\,; \quad x_{cm} = \frac{1}{m}\int x\rho\, dV \text{ etc.} \tag{4.21'}$$

Dacă sistemul se descompune în părți M_s cu centrele de masă cunoscute $\vec{R}_{cm\,s}$, atunci grupînd sumele (4.21) pe aceste părți, avem:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \sum_s M_s \vec{R}_{cm\,s}, \qquad x_{cm} = \frac{1}{m} \sum_s M_s X_{cm\,s} \text{ etc.} \tag{4.21''}$$

Centrul de masă (CM) este un anumit punct geometric asociat sistemului mecanic; în acest punct pot să *nu* existe particule sau masă distribuită, de exemplu, CM al unui inel sau al unei pături sferice.

Dacă un corp omogen posedă un plan sau o axă de simetrie, CM se va găsi în acel plan sau pe acea axă, iar dacă corpul omogen posedă un centru de simetrie, CM va fi în acel punct.

Centrul de masă joacă un rol *excepțional* în studiul mișcării sistemului, după cum se va vedea mai jos.

Derivînd formula (4.21) obținem:

$$m\dot{\vec{r}}_{cm} = m\vec{v}_{cm} = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k \vec{p}_k = \vec{P}. \tag{4.22}$$

Teorema 1. *Impulsul total $\vec{P}$ al sistemului este egal cu masa m a sistemului înmulțită cu viteza $\vec{v}_{cm}$ a centrului de masă, ca și cum întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM și s-ar mișca cu viteza acestuia.*

Dacă sistemul este izolat: $\vec{F} = \dot{\vec{P}} = 0$, $\vec{P} = \text{const}$ (impulsul total al sistemului izolat se conservă), dar $\vec{P} = m\vec{v}_{cm}$, deci $\vec{v}_{cm} = \text{const}$.

În raport cu un reper inerțial, centrul de masă al unui sistem izolat se mișcă rectiliniu uniform sau este în repaus. (Aceasta este legea inerției pentru un sistem.)

Derivînd încă o dată (4.22) și ținînd seama de (4.11), obținem

$$m\ddot{\vec{r}}_{cm} = m\dot{\vec{v}}_{cm} = m\vec{a}_{cm} = \dot{\vec{P}} = \vec{F} = \sum_k \vec{F}_k. \tag{4.23}$$

Teorema 2. *Rezultanta forțelor externe $\vec{F}$ este egală cu masa sistemului m înmulțită cu accelerația CM.*

Centrul de masă al sistemului se mișcă ca un punct material cu masa egală cu masa sistemului și asupra căruia se aplică rezultanta forțelor externe (teorema mișcării centrului de masă), *ca și cum* toate forțele externe s-ar aplica în CM și întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM și s-ar mișca cu accelerația acestuia.

Din (4.23) rezultă sub formă integrată:

$$\vec{H} = \int \vec{F}\, dt = m\Delta\vec{v}_{cm}. \tag{4.24}$$

Impulsul forțelor externe este egal cu masa sistemului înmulțită cu variația vitezei centrului de masă.

Consecință: *Forțele interne nu pot schimba mișcarea centrului de masă.* De exemplu, după explozia unui obuz în vid, centrul de masă continuă să se miște neperturbat pe parabolă, ca și cum nimic nu s-ar fi întîmplat, deși schijele se împrăștie în jurul traiectoriei (fig. 4.2). În momentul în care una din schije atinge Pămîntul, intervine o forță externă și, bineînțeles, CM își schimbă mișcarea.

Un *cuplu* de forțe, oriunde ar fi aplicat, nu poate schimba mișcarea centrului de masă (rezultantă nulă!), ci doar *rotește* corpul *în jurul centrului de masă.* De exemplu, dacă într-o barcă ușoară de cauciuc (pneumatică) punem în diferite locuri un bloc de plumb și aplicăm bărcii în diferite locuri

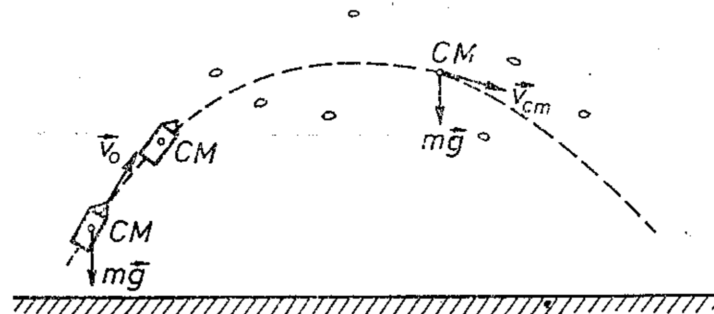


Fig. 4.2

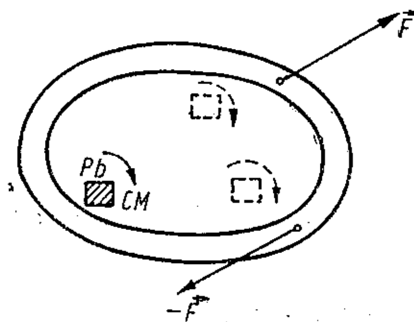


Fig. 4.3

un *cuplu* de forțe orizontale, nu vom putea urni din loc CM al bărcii, a cărui poziție coincide practic cu cea a blocului de plumb; barca se va roti de fiecare dată *doar* în jurul CM (fig. 4.3).

4.6. MIȘCAREA ÎN JURUL CENTRULUI DE MASĂ

Teoremele de descompunere

Sistemul de coordonate *inerțial* legat de laborator se numește *„sistem de coordonate de laborator"*, notat prescurtat SL.

Alegem un SC mobil cu originea în CM al sistemului și cu axele de *orientare fixă* (de exemplu, paralele) față de SL, care se mișcă deci prin *translație*, solidar cu CM. Acest SC se numește *„sistemul centrului de masă"*, notat prescurtat SCM. Subliniem că SCM *se mișcă prin* **translație** *față de* SL, *indiferent de mișcarea* CM, *dar* **nu se rotește** *față de* SL.

Atunci mișcarea punctelor materiale ale sistemului se descompune într-o mișcare de *translație*, egală cu translația centrului de masă și o mișcare *relativă* în jurul centrului de masă, anume în SCM. Avem (fig. 4.4):

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'_k. \tag{4.25}$$

Prin înmulțire cu m_k și sumare avem

$$\sum m_k \vec{r}_k = \sum m_k \vec{r}_{cm} + \sum m_k \vec{r}'_k \text{ sau } m\vec{r}_{cm} = m\vec{r}_{cm} + \sum m_k \vec{r}'_k,$$

adică

$$\vec{r}'_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{r}'_k = 0, \tag{4.26}$$

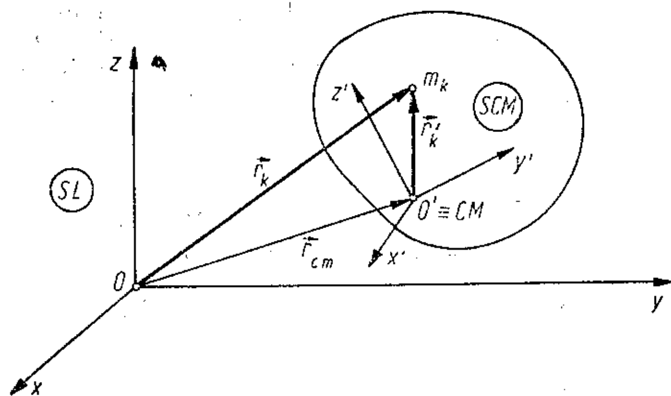


Fig. 4.4

ceea ce era evident, deoarece CM coincide cu O' și deci vectorul său de poziție relativ $\vec r'_{cm}$ în SCM este automat zero.

4.6.1. IMPULSUL

Derivînd (4.25) avem

$$\dot{\vec r}_k = \dot{\vec r}_{cm} + \dot{\vec r}'_k \text{ sau } \vec v_k = \vec v_{cm} + \vec v'_k, \tag{4.27}$$

deoarece

$$\dot{\vec r}'_k = (x'_k\vec i' + y'_k\vec j' + z'_k\vec k')^{\cdot} = \dot x'_k\vec i' + \dot y'_k\vec j' + \dot z'_k\vec k' = \vec v'_k;$$

versorii SCM se mișcă prin *translație*, deci derivatele lor sînt nule.

Înmulțind (4.27) cu m_k și sumînd avem

$$\vec P = \sum m_k\vec v_k = \sum m_k\vec v_{cm} + \sum m_k\vec v'_k = m\vec v_{cm} + \sum m_k\vec v'_k = \vec P + \sum m_k\vec v'_k,$$

de unde

$$\vec P' = \sum m_k\vec v'_k \equiv m\vec v'_{cm} \equiv 0,\quad \vec v'_{cm} \equiv 0, \tag{4.28}$$

adică *impulsul relativ al sistemului, calculat* în SCM (impulsul propriu sau intern), *este identic nul.* Aceasta este evident deoarece CM coincide cu O' și deci viteza sa $\vec v'_{cm}$ în SCM este automat permanent zero. De altfel relația (4.28) se obține direct prin derivarea relației (4.26).

Prin urmare, *impulsul total al sistemului* $\vec P = \Sigma m_k\vec v_k$ *coincide cu impulsul orbital sau extern* $\vec P = m\vec v_{cm}$, *impulsul propriu sau intern* $\vec P' = \Sigma m_k\vec v'_k$ *fiind identic nul.*

Teorema impulsului total, valabilă în SL, va fi valabilă și în SCM numai dacă acesta este inerțial, atunci în mod banal $\vec F \equiv 0$ și $\vec P' \equiv 0$.

4.6.2. MOMENTUL CINETIC

Să transformăm, conform lui (4.25, 27), expresia momentului cinetic, calculat în raport cu originea SL :

$$\vec J = \Sigma\vec r_k \times m_k\vec v_k = \Sigma(\vec r_{cm} + \vec r'_k) \times m_k(\vec v_{cm} + \vec v'_k) =$$

$$= \Sigma\vec r_{cm} \times m_k\vec v_{cm} + \Sigma\vec r'_k \times m_k\vec v'_k + \Sigma\vec r_{cm} \times m_k\vec v'_k + \Sigma m_k\vec r'_k \times \vec v_{cm}.$$

Ultimii doi termeni se anulează conform lui (4.28, 26), astfel încît rezultă descompunerea :

$$\vec J = \Sigma\vec r_k \times \vec p_k = \vec r_{cm} \times m\vec v_{cm} + \Sigma\vec r'_k \times \vec p'_k = \vec r_{cm} \times \vec P + \vec S = \vec L + \vec S, \tag{4.29}$$

adică *momentul cinetic total* $\vec J$ (în raport cu originea SL) *este egal cu momentul cinetic orbital sau extern* $\vec L$ *al centrului de masă, în care ar fi concentrată toată masa sistemului, plus momentul cinetic propriu sau intern* (*de „spin"*) $\vec S$ *calculat în* SCM (*în raport cu* CM).

Derivînd (4.29) și ținînd seama de (4.14), rezultă

$$\dot{\vec J} = \dot{\vec r}_{cm} \times \vec P + \vec r_{cm} \times \dot{\vec P} + \dot{\vec S} = \vec M = \Sigma\vec r_k \times \vec F_k = \Sigma(\vec r_{cm} + \vec r'_k) \times \vec F_k,$$

dar

$$\dot{\vec r}_{cm} \times \vec P = \vec v_{cm} \times m\vec v_{cm} = 0,\qquad \dot{\vec P} = \vec F,$$

astfel încît

$$\dot{\vec J} = \vec r_{cm} \times \vec F + \dot{\vec S} = \vec r_{cm} \times \vec F + \Sigma\vec r'_k \times \vec F_k,\qquad (\dot{\vec L} = \vec r_{cm} \times \vec F),$$

de unde rezultă **teorema momentului cinetic relativ :**

$$\dot{\vec S} = \frac{d}{dt}\Sigma\vec r'_k \times \vec p'_k = \vec M' = \Sigma\vec r'_k \times \vec F_k, \tag{4.30}$$

$$\Delta\vec S = \vec S_2 - \vec S_1 = \int \vec M' dt, \tag{4.31}$$

adică *teorema momentului cinetic se exprimă la fel în* SL *și în* SCM, *oricare ar fi mișcarea de translație a* SCM.

4.6.3. ENERGIA CINETICĂ

Să transformăm acum și expresia energiei cinetice :

$$\vec v_k = \vec v_{cm} + \vec v'_k,\qquad v_k^2 = v_{cm}^2 + v_k'^2 + 2\vec v_{cm}\vec v'_k.$$

Înmulțind cu m_k și însumînd, ultimul termen dă zero, conform lui (4.28), și obținem **teorema lui S. König** (1751):

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_k v_k'^2 = E_{cm} + E_c', \qquad (4.32)$$

adică *energia cinetică totală a sistemului E_c (în SL) este egală cu energia cinetică de translație (orbitală sau externă) E_{cm} a centrului de masă, în care ar fi concentrată toată masa sistemului, plus energia cinetică relativă (proprie sau internă) E_c' în* SCM. (Termenul de „interferență" dintre ele dispare numai în SCM !).

Teorema energiei cinetice (4.17) devine acum:

$$dE_c = d\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + E_c'\right) = \sum(\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k)(d\vec{r}_{cm} + d\vec{r}_k') =$$

$$= \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_{cm} + \vec{F}\, d\vec{r}_{cm} + \sum(\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k) d\vec{r}_k',$$

dar $\sum \vec{\mathcal{F}}_k = 0$ și

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_{cm}) = \vec{F} \rightarrow d\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2\right) = \vec{F} d\vec{r}_{cm} = \vec{F}\vec{v}_{cm} dt, \qquad (4.33)$$

astfel încît rezultă **teorema energiei cinetice relative**:

$$dE_c' = d\sum \frac{1}{2} m_k v_k'^2 = \sum(\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k) d\vec{r}_k' = d\mathcal{W}' + dW', \qquad (4.34)$$

$$\Delta E_c' = E_{c2}' - E_{c1}' = \sum_k \int (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k) d\vec{r}_k' = \mathcal{W}' + W', \qquad (4.35)$$

adică *teorema energiei cinetice totale se exprimă la fel în* SL *și în* SCM, *oricare ar fi mișcarea de translație a* SCM.

În concluzie, teoremele de mai sus ne arată că *mișcarea unui sistem mecanic se descompune în mișcarea de* **translație** (orbitală sau externă) *a centrului de masă în care ar fi concentrată toată masa sistemului și în care s-ar aplica rezultanta forțelor externe, și în mișcarea* **relativă** (proprie sau internă) *față de centrul de masă în* SCM.

Observații. *a)* Lucrul mecanic al forțelor *interne* este *același* în SL și în SCM, fiindcă o translație globală a sistemului mecanic nu modifică lucrul mecanic al forțelor interne:

$$d\mathcal{W} = \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_k = \sum \vec{\mathcal{F}}_k (d\vec{r}_{cm} + d\vec{r}_k') = \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_k' = d\mathcal{W}', \qquad (4.36)$$

nu însă lucrul mecanic al forțelor externe:

$$dW = \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k = \vec{F} d\vec{r}_{cm} + \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k' = d\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2\right) + dW'. \qquad (4.37)$$

b) Un *cîmp gravitațional uniform* nu influențează cu nimic momentul cinetic relativ (propriu sau intern) și energia cinetică relativă ale sistemului în SCM. În adevăr, conform lui (4.26, 28):

$$\vec{F}_k = m_k \vec{g}, \quad \vec{M}' = \sum \vec{r}_k' \times m_k \vec{g} = \sum m_k \vec{r}_k' \times \vec{g} = \vec{r}_{cm}' \times m\vec{g} = 0. \qquad (4.38)$$

$$dW' = \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k' = \sum m_k \vec{g} d\vec{r}_k' = \vec{g} \sum m_k \dot{\vec{r}}_k' dt = m\vec{g}\vec{v}_{cm}' dt = 0. \qquad (4.39)$$

Rezultatul este evident, deoarece centrul de masă coincide cu centrul de greutate, adică cu punctul de aplicație al rezultantei $\vec{G} = m\vec{g}$ a forțelor de greutate paralele $\vec{F}_k = m_k\vec{g}$ și deci momentul lui $\vec{G}$ față de CM este nul ($\vec{r}_{cm}' = 0$) și puterea dezvoltată de $\vec{G}$ este nulă ($\vec{v}_{cm}' = 0$).

4.7. CIOCNIRI

Prin **ciocnirea** a două sau mai multe corpuri se înțelege în general un *proces de interacție*, în care atît înainte cît și după interacție corpurile se găsesc la distanțe mari (infinite) unele față de altele, adică nu interacționează înainte și după ciocnire, deci *interacția durează un timp* **finit**.

4.7.1. CLASIFICAREA CIOCNIRILOR

Dacă în urma ciocnirii starea **internă** *a fiecărui corp* **nu se schimbă**, *ciocnirea se numește* **elastică**.

Vom considera ciocnirea corpurilor *macroscopice*.

În momentul atingerii corpurile încep să se deformeze, viteza lor relativă (a unuia față de celălalt) se reduce la zero, energia cinetică *relativă* se transformă în energia de deformare și în alte forme de energie. Aceasta este etapa de comprimare. Urmează apoi etapa a doua, de separare a corpurilor, deformațiile se reduc, viteza relativă crește și energia cinetică relativă se restituie parțial.

În ciocnirea *elastică* deformațiile se anulează și energia cinetică relativă se restituie integral, fără a se transforma în alte forme de energie.

În ciocnirea *total neelastică* (plastică) corpurile fuzionează (se cuplează) și continuă mișcarea împreună, cu o viteză comună.

În realitate, ciocnirile corpurile macroscopice nu sînt (perfect) elastice, ci mai mult sau mai puțin neelastice.

Dacă descompunem viteza relativă de ciocnire $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (a corpului 1 față de corpul 2) după linia de ciocnire NN' și planul de contact, tangent, TT' (fig. 4.5), atunci ambele componente se schimbă în general prin ciocnire, deoarece corpurile nu sînt nici perfect elastice și nici absolut netede.

Componenta vitezei relative, normală pe planul de contact, v_{rn}, își schimbă semnul prin ciocnire, deoarece înainte de ciocnire corpurile se apropiau unul de altul, iar după ciocnire se depărtează unul de altul. Corpurile nefiind perfect elastice, componenta normală a vitezei relative după ciocnire v_{rn}' este în modul mai mică decît înainte de ciocnire, $|v_{rn}'| < |v_{rn}|$.

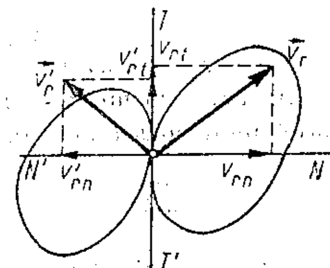


Fig. 4.5

Componenta vitezei relative, conținută în planul de contact, v_{rt}, reprezintă viteza de lunecare a unui corp peste celălalt în momentul ciocnirii. Datorită frecării, această viteză se micșorează în urma ciocnirii, $v'_{rt} < v_{rt}$.

Dacă linia de ciocnire NN' trece în momentul ciocnirii prin centrele de masă ale celor două corpuri, ciocnirea se numește *centrică*, în caz contrar, *acentrică*. Dacă înainte de ciocnire corpurile se mișcau după linia de ciocnire NN' ($v_{rt} = 0$), ciocnirea se numește *frontală*, în caz contrar, *oblică*.

Pentru sfere omogene ciocnirea va fi totdeauna centrică, dar în general oblică.

4.7.2. LEGILE DE CONSERVARE

În procesul de ciocnire se exercită forțe de interacțiune între corpuri, deci *forțe interne, care nu pot schimba impulsul total și momentul cinetic total ale sistemului*. Lucrul mecanic al forțelor interne este însă în general diferit de zero și produce o variație a energiei cinetice a sistemului, conform teoremei (4.17—18).

În intervalul de timp foarte scurt cît durează ciocnirea, variația de impuls și variația de moment cinetic, produse de eventualele forțe externe se pot neglija în comparație cu variațiile de impuls și de moment cinetic ale fiecărui corp în parte, produse de forțele interne, care deși durează puțin, sînt mult mai mari decît forțele obișnuite externe.

De aceea *impulsul total și momentul cinetic total ale corpurilor care se ciocnesc*, **imediat înainte** *de ciocnire, sînt egale cu impulsul total și momentul cinetic total ale corpurilor* **imediat după** *ciocnire*, adică *impulsul total și momentul cinetic total ale sistemului de corpuri care se ciocnesc se conservă în procesul ciocnirii*.

Eventualele forțe externe aplicate produc o variație de impuls și de moment cinetic neglijabile în timpul foarte scurt cît durează ciocnirea.

Pentru *fiecare corp separat* putem scrie (4.24) și (4.15) (în timpul foarte scurt al ciocnirii corpul practic nu se deplasează):

$$\vec{H} = \sum_s \vec{H}_s = m\Delta\vec{v}_{cm} \text{ și } \vec{K} = \sum_s \vec{r}_s \times \vec{H}_s = \Delta\vec{J}. \quad (4.40)$$

4.7.3. CIOCNIREA PLASTICĂ

În cazul ciocnirii *total neelastice* (plastice) a două corpuri, ele se cuplează astfel încît conservarea impulsului total dă:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}' \rightarrow \vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.41)$$

unde $\vec{v}_{1,2}$, $\vec{v}'$ sînt vitezele centrelor de masă (fig. 4.6).

Energia cinetică pierdută, adică transformată în alte forme de energie (mai ales căldură), va fi (nu considerăm rotațiile proprii):

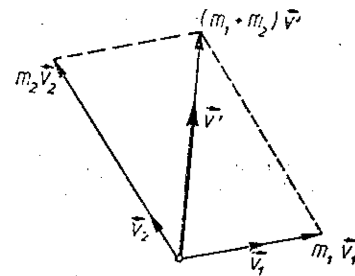


Fig. 4.6

$$-\Delta E_c = Q = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\mu v_r^2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad (4.42)$$

unde μ se numește *masa redusă* a celor două corpuri, iar $\vec{v}_r$ este viteza lor relativă (a corpului 1 față de corpul 2).

4.7.4. CIOCNIREA ELASTICĂ

În cazul ciocnirii *perfect elastice*, pe lîngă impulsul total se conservă și energia *cinetică* totală. Considerînd ciocnirea *centrică și frontală*, corpurile înainte și după ciocnire se mișcă pe aceeași direcție (*dreaptă*) (cazul *unidimensional*) și avem

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2', \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2, \quad (4.43)$$

de unde

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \quad m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2).$$

și împărțind membru la membru

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \text{ sau } v_r' = v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2) = -v_r, \quad (4.44)$$

adică viteza relativă își schimbă doar semnul. Această ecuație împreună cu prima ecuație din (4.43) dau:

$$v_1' = 2v' - v_1, \quad v_2' = 2v' - v_2, \text{ unde } v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.45)$$

viteza v' de aici este viteza comună a corpurilor în momentul cînd se termină prima etapă a comprimării și începe a doua etapă, a separării.

Exemple. a) Dacă masele sînt egale, $m_1 = m_2$, rezultă din (4.45):

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1, \quad (4.45')$$

adică particulele schimbă vitezele între ele, ca și cum ar trece una pe lîngă cealaltă fără să se ciocnească.

b) Dacă una din particule este în repaus înainte de ciocnire, de exemplu $v_2 = 0$, obținem din (4.45):

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{4.46}$$

Dacă $m_1 > m_2$, particula m_2 lovită capătă o viteză $v_2' > v_1$ și particula m_1 continuă să se miște înainte. Dacă $m_1 < m_2$, particula m_1 ricoșează înapoi. Dacă $m_1 = m_2$ prima particulă se oprește, iar a doua (lovită) pleacă cu viteza celei dintîi.

4.7.5. COEFICIENȚII DE CIOCNIRE

O măsură a caracterului mai mult sau mai puțin elastic al ciocnirii este **coeficientul de restituire** (Newton), definit prin raportul dintre componenta *normală* (pe planul de contact) a vitezei relative, după ciocnire $v_{rn}' = v_{1n}' - v_{2n}'$ și înainte de ciocnire $v_{rn} = v_{1n} - v_{2n}$, anume:

$$k \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{v_{rn}'}{v_{rn}} = -\frac{v_{1n}' - v_{2n}'}{v_{1n} - v_{2n}}, \ 0 \leqslant k \leqslant 1. \tag{4.47}$$

Se introduce și un **coeficient de frecare momentană** f definit prin raportul dintre componenta *tangențială* (în planul de contact) a vitezei relative, după ciocnire $v_{rt}' = v_{1t}' - v_{2t}'$ și înainte de ciocnire $v_{rt} = v_{1t} - v_{2t}$, anume:

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_{rt}'}{v_{rt}} = \frac{v_{1t}' - v_{2t}'}{v_{1t} - v_{2t}}, \ 0 \leqslant f \leqslant 1. \tag{4.48}$$

Acest coeficient este de obicei apropiat de 1 și se pune adesea egal cu 1 (la ciocniri apropiate de ciocniri frontale, sau la corpuri netede).

Pentru ciocnirea total neelastică $\vec{v}_r' = 0$, $(\vec{v}_1' = \vec{v}_2')$ și deci $k = 0$, $f = 0$. Pentru ciocnirea perfect elastică $v_{rn}' = -v_{rn}$ de exemplu (4.44), deci $k = 1$ și $f = 1$. Bilele de fildeș se apropie cel mai mult de o ciocnire elastică.

În cazul ciocnirii unidimensionale cu coeficientul de restituire k, obținem din conservarea impulsului:

$$v_1' = v' + \frac{km_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1), \qquad v_2' = v' + \frac{km_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{4.49}$$

și energia cinetică pierdută:

$$-\Delta E_c = Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2)(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\mu(1 - k^2)v_r^2. \tag{4.50}$$

4.7.6. CIOCNIREA CU UN PERETE

În cazul ciocnirii perfect elastice, centrice și frontale, cu un *perete*, adică cu un corp de *masă foarte mare*, $m_2 \gg m_1$, din (4.45) rezultă

$$v_1' = 2v_2 - v_1, \ v_2' = v_2. \tag{4.51}$$

În particular, pentru un perete în repaus, $v_2 = 0$, rezultă

$$v_1' = -v_1, \ v_2' = v_2, \tag{4.52}$$

adică corpul 1 se întoarce înapoi cu aceeași viteză (în modul).

În cazul ciocnirii *oblice* (perfect elastice) cu peretele în repaus (fig. 4.7):

$$v_t' = v_t, \ v_n' = -v_n, \ |\vec{v}'| = |\vec{v}|, \tag{4.53}$$

adică viteza incidentă $\vec{v}$ și viteza reflectată $\vec{v}'$ sînt în același plan cu normala și unghiul de reflexie α' este egal cu unghiul de incidență α (ca la reflexia luminii).

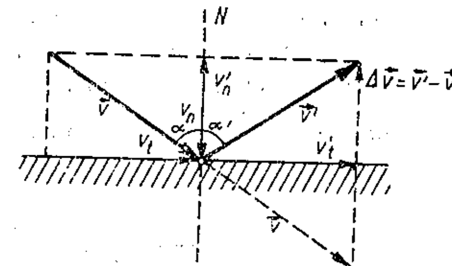


Fig. 4.7

Dacă notăm cu τ durata ciocnirii, atunci forța medie exercitată de perete asupra particulei va fi

$$\langle\vec{f}\rangle = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\tau} = \frac{m\vec{v}' - m\vec{v}}{\tau}, \qquad \langle f\rangle = \frac{2mv\cos\alpha}{\tau}, \tag{4.54}$$

perpendiculară pe perete. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, o forță egală în modul și de sens contrar se exercită perpendicular asupra peretelui din partea particulei.

4.8. MASA VARIABILĂ

Dacă într-un timp infinitezimal dt corpul cîștigă sau pierde o cantitate infinitezimală de masă dm, forțele de alipire sau expulzare sînt forțe interne și *nu* pot schimba impulsul *total* al sistemului. Notînd cu $\vec{F}$ forța externă asupra corpului de masă m, cu $\vec{v}$ viteza acestuia (a CM) și cu $\vec{u}$ viteza masei dm, aplicăm teorema impulsului total, considerînd cazul alipirii (d$m > 0$) (fig. 4.8):

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = (m + \mathrm{d}m)(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) - (m\vec{v} + \mathrm{d}m \cdot \vec{u}),$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \quad \vec{v}'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \ \vec{v}' = \vec{u} - \vec{v}, \tag{4.55}$$

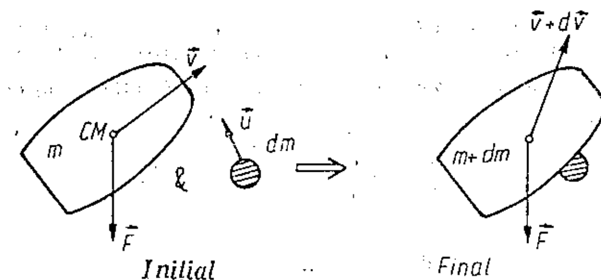


Fig. 4.8

(termenul infinit mic de ordinul doi $dm \cdot d\vec{v}$ dispare prin trecerea la limită), unde $\vec{v}'$ este viteza relativă față de corp a particulelor alipite. Aceeași ecuație se obține și în cazul expulzării ($dm < 0$) (fig. 4.9):

$$\vec{F}\,dt = (m - |\,dm\,|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |\,dm\,|\,\vec{u} - m\vec{v} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) -$$
$$- dm \cdot \vec{u} - m\vec{v}.$$

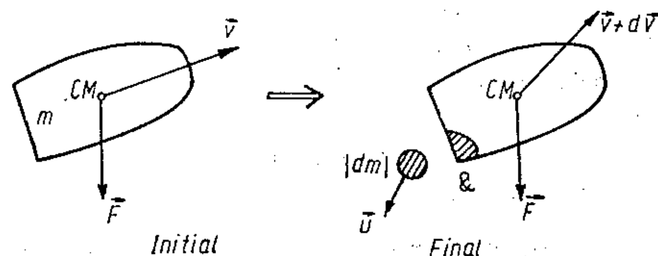


Fig. 4.9

Ecuația (4.55) este *ecuația lui I. V. Meșcerski* (1897) ($dm > 0$ pentru captare, $dm < 0$ pentru emisie).

Se poate scrie și astfel:

$$\vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\vec{F} + \vec{v}'\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ sau } \vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \tag{4.56}$$

unde

$$\vec{F}_r \overset{\text{def}}{=} \vec{v}'\frac{dm}{dt} \tag{4.57}$$

este **forța reactivă** care acționează asupra corpului; ea este proporțională cu viteza relativă $\vec{v}'$ de expulzare (sau alipire) a particulelor și cu debitul masic de expulzare (sau alipire). În cazul expulzării (ejectării), masa corpului scade, $dm < 0$ și forța reactivă $\vec{F}_r$ este de sens opus vitezei de expulzare $\vec{v}'$ a particulelor.

Ecuația (4.56) se aplică în problema mișcării rachetelor (navigația interplanetară), a avioanelor și proiectilelor cu reacție, în unele probleme astronomice de captare a meteoriților și chiar în fizica atomică (la dezintegrarea alfa).

Exemple. Mișcarea rachetei. a) Ca exemplu de aplicare a ecuației (4.56), fie o rachetă în cosmos pornind din repaus, de masă inițială m_0, care expulzează continuu gazele de ardere în direcția mișcării cu viteza $\vec{v}'$ *constantă* față de rachetă. Ecuația (4.56) devine atunci, proiectată pe direcția mișcării ($\vec{F} = 0$):

$$v'\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt}, \qquad dv = v'\frac{dm}{m},$$
$$v = v'\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = v^2 \ln\frac{m}{m_0} = -v' \ln\frac{m_0}{m}. \tag{4.58}$$

Prin urmare, viteza rachetei este opusă vitezei de expulzare v' și dacă masa se reduce, de exemplu, la jumătate, viteza atinsă va fi $v = -0{,}693\,v' \approx -0{,}7\,v'$. Dacă masa rachetei se reduce de $e = 2{,}718$ ori, viteza devine $v = -v'$.

b) *O rachetă lansată de pe Pămînt.* Neglijăm frecarea cu aerul și variația lui g, atunci ($\vec{F} = m\vec{g}$, $\vec{v}' = $ const):

$$m\vec{g} + \vec{v}'\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ sau } \vec{g}\,dt + \vec{v}'\frac{dm}{m} = d\vec{v}, \tag{4.59}$$

ceea ce dă prin integrare

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - \vec{v}' \ln\frac{m_0}{m}. \tag{4.60}$$

În cazul lansării rachetei pe verticală din repaus ($v' =$ cont în jos), avem

$$v = |\,v'\,| \ln\frac{m_0}{m} - gt \tag{4.61}$$

și condiția de desprindere de Pămînt

$$F_r \geq m_0 g, \quad \left|\, v'\frac{dm}{dt} \right| \geq m_0 g \text{ sau } D \geq \frac{m_0 g}{|\,v'\,|}, \tag{4.62}$$

unde $D = \left|\frac{dm}{dt}\right|$ este debitul de expulzare a gazelor arse.

PROBLEME

4.1. Trei bărci merg una după alta cu viteza v fiecare. În fiecare barcă se află cîte un om, astfel încît masa bărcii și a omului este M, iar în barca din mijloc mai există doi saci de masa m fiecare. Din barca din mijloc sînt aruncați cei doi saci, unul spre barca din față, celălalt spre barca din spate, cu aceeași viteză *relativă* u față de barcă. Care vor fi vitezele finale ale bărcilor, dacă sacii sînt aruncați: **a)** simultan; **b)** succesiv?

R. a) $v_1 = v + \frac{m}{M + m}u, \qquad v_2 = v, \qquad v_3 = v - \frac{m}{M + m}u;$

b) $v_1 = v + \frac{m}{M + m}u, \qquad v_2 = v + \frac{m^2}{M(M + m)}u,$

$v_3 = v - \frac{m(M + 2m)}{(M + m)^2}u$ sau $\quad v_3 = v + \frac{m(M + 2m)}{(M + m)^2}u,$

$v_2 = v - \frac{m^2}{M(M + m)}u, \qquad v_3 = v - \frac{m}{M + m}u.$

4.2. O particulă de masă m se mişcă cu viteza v_1 şi ajunge din urmă un *perete* care se mişcă cu viteza v_2 şi de care se ciocneşte frontal cu coeficientul de restituire k. Să se afle vitezele după ciocnire, variaţia de impuls şi de energie cinetică a particulei incidente în urma ciocnirii.

R. $v_1' = v_2 + k(v_2 - v_1)$, $v_2' = v_2$; $\Delta p = -m(1 + k)(v_1 - v_2)$.

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} m(1 + k)(v_1 - v_2)[v_1 + v_2 - k(v_1 - v_2)].$$

4.3. O particulă de masă m_1 loveşte o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Considerînd ciocnirea unidimensională cu coeficientul de restituire k, să se afle vitezele particulelor după ciocnire şi energia cinetică pierdută (căldura degajată).

R. $v_1' = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} v_1$, $\quad v_2' = \frac{m_1(1 + k)}{m_1 + m_2} v_1$, $\quad -\Delta E_c = Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2)v_1^2$.

4.4. Două bile de mase m_1, m_2 sînt suspendate pe fire paralele, astfel încît bilele se ating. Prima bilă este deviată pînă la o înălţime h_1 şi lăsată liber. Ştiind coeficientul de restituire k şi considerînd ciocnirea frontală, să se afle la ce înălţime se ridică bilele după ciocnire şi căldura degajată prin ciocnire

R. $h_1' = h_1 \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2$, $\quad h_2' = h_1 \left(\frac{m_1(1 + k)}{m_1 + m_2}\right)^2$,

$$-\Delta E_c = Q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2)gh_1.$$

4.5. O particulă de masă m_1 loveşte o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Considerînd ciocnirea unidimensională cu coeficientul de restituire k, să se afle ce fracţiune din energia cinetică iniţială a particulei *1* este transferată particulei *2* şi ce fracţiune se transformă în căldură.

R. a) $\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 + k)^2$; b) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2)$.

4.6. Două particule de mase m_1, m_2 se află în repaus pe un plan orizontal la distanţa l_0 una de alta. Particulei 1 i se aplică un impuls H îndreptat spre particula 2. Pe ce distanţă se deplasează particula 2 după ciocnire (unidimensională), dacă coeficientul de restituţie este k şi coeficientul de frecare pentru ambele particule cu planul este μ?

R. $l = \frac{m_1^2(1 + k)^2}{2\mu g(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{H^2}{m_1^2} - 2\mu g l_0\right)$.

4.7. Pe o dreaptă sînt aşezate în repaus n particule (bile) de mase m_1, m_2, ..., m_n. I se imprimă primei particule o viteză v_1, orientată de-a lungul dreptei spre celelalte particule. Considerînd ciocnirile plastice, să se afle viteza finală comună a particulelor. Dar dacă ciocnirea se face cu coeficientul de restituţie k, care va fi viteza ultimei particule?

R. a) $v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$,

b) $v_n' = \frac{m_1 m_2 \ldots m_{n-1}(1 + k)^{n-1}}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3) \ldots (m_{n-1} + m_n)} v_1$.

4.8. O bilă de masă m cade liber în vid, fără viteză iniţială, de la o înălţime h. Ştiind că la fiecare ciocnire cu podeaua coeficientul de restituţie este k, iar timpul de contact cu podeaua constituie o fracţiune f din timpul de cădere respectiv, să se afle timpul total pînă la oprirea bilei şi căldura totală degajată.

R. $T = \frac{1 + k + f}{1 - k} \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $\quad Q = mgh$.

4.9. Două bile de mase m_1, m_2 se mişcă pe direcţii perpendiculare cu vitezele v_1, respectiv v_2. După ciocnire bila m_2 se opreşte. Care va fi viteza primei bile după ciocnire?

R. $v_1 = \frac{1}{m_1} \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}$.

4.10. Asupra unui punct material de masă m care are viteza $\vec{v}$ acţionează o forţă de ciocnire în urma căreia viteza punctului devine $\vec{v'}$. Să se arate că lucrul mecanic efectuat de forţa de ciocnire în timpul ciocnirii este $W = \Delta\vec{p} \cdot \vec{v}^*$, unde $\Delta\vec{p}$ este impulsul transferat punctului material, iar $\vec{v}^* = \frac{\vec{v} + \vec{v'}}{2}$.

4.11. Două bile de mase $m_1 = 0{,}20$ kg, $m_2 = 0{,}40$ kg se mişcă cu vitezele $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = -15$ m/s, una spre cealaltă. Forţa de interacţiune dintre bile se poate aproxima printr-o linie frîntă ca în figura 4.10. Considerînd ciocnirea unidimensională, să se calculeze căldura degajată prin ciocnire.

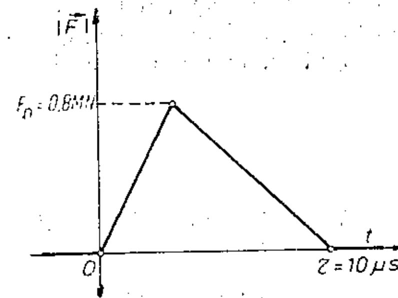


Fig. 4.10

R. $v_1' = v_1 - \frac{F_0 \tau}{2m_1}$, $\quad v_2' = v_2 + \frac{F_0 \tau}{2m_2}$, $\quad Q = 40$ J.

4.12. O navă cosmică cu masa m_0 se mişcă cu viteza $\vec{v_0} =$ const în absenţa forţelor exterioare. Pentru a-i modifica direcţia de mişcare se acţionează un motor cu reacţie care ejectează gazele cu viteza v' constantă faţă de navă şi perpendiculară pe viteza navei. La sfîrşitul funcţionării motorului masa navei a devenit m. Cu ce unghi a deviat direcţia navei?

R. $\theta = \frac{v'}{v_0} \ln \frac{m_0}{m}$.

CAPITOLUL 5

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

Toate corpurile din natură sînt mai mult sau mai puţin *deformabile*. Nu există corpuri absolut rigide. Atunci cînd în problema considerată se pot neglija deformările corpului, obţinem aproximaţia solidului rigid (nedeformabil). La viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), deformaţiile corpurilor nu mai pot fi neglijate (orice corp este deformabil) şi modelul solidului rigid nu mai este valabil (nu se aplică în mecanica relativistă).

5.1. TRANSLAŢIA ŞI ROTAŢIA

5.1.1. TRANSLAŢIA

Mişcarea de translaţie a solidului este acea mişcare în care orice dreaptă legată rigid de solid se mişcă **paralel** *cu ea însăşi.*

Toate punctele corpului au traiectorii, viteze şi acceleraţii identice, de aceea mişcarea de translaţie este complet determinată de mişcarea unui *singur punct* arbitrar al corpului (se aplică modelul punctului material). Viteza de translaţie este deci un vector *liber*, al cărui punct de aplicaţie poate fi ales în orice punct al corpului. De asemenea şi acceleraţia de translaţie este un vector *liber*.

5.1.2. ROTAŢIA

Mişcarea de rotaţie a solidului este acea mişcare în care toate punctele solidului descriu cu aceeaşi viteză unghiulară **cercuri paralele** *ale căror centre sînt situate pe o dreaptă, numită* **axă de rotaţie.**

Viteza unghiulară $\omega = \dot{\theta}$, *aceeaşi* pentru toate punctele rigidului, se reprezintă printr-un *vector* de modul ω, situat de-a lungul axei de rotaţie în sensul dat de regula burghiului. Vectorul $\vec{\omega}$ este vector *glisant* (alunecător), al cărui punct de aplicaţie poate fi ales în orice punct al axei de rotaţie.

Alegînd un punct arbitrar O *pe axă* şi ducînd vectorul de poziţie $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, putem scrie (fig. 5.1):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \tag{5.1}$$

În adevăr, direcţia şi sensul lui $\vec{\omega} \times \vec{r}$ corespund lui $\vec{v}$, iar ca modul

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha = \omega R.$$

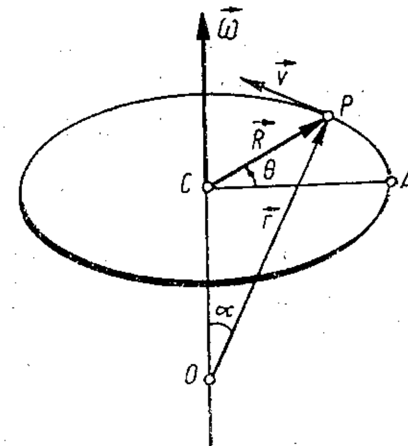


Fig. 5.1

În general mişcarea de rotaţie poate fi neuniformă şi însăşi axa de rotaţie se poate schimba. *Vectorul acceleraţie unghiulară* $\vec{\varepsilon}$ este prin definiţie:

$$\vec{\varepsilon} \overset{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}. \tag{5.2}$$

Dacă vectorul $\vec{\omega}$ variază doar în modul, $\vec{\varepsilon}$ va fi paralel cu $\vec{\omega}$, în acelaşi sens cu $\vec{\omega}$ dacă modulul $|\vec{\omega}|$ creşte. Dacă axa de rotaţie se înclină, adică $\vec{\omega}$ variază şi ca direcţie, atunci $\vec{\varepsilon}$ va fi oblic faţă de axă (faţă de $\vec{\omega}$).

5.2. DEPLASAREA SISTEMULUI DE COORDONATE

5.2.1. DERIVATA UNUI VECTOR

Lemă: *Derivata unui vector variabil dar de* **modul constant** *este perpendiculară pe acest vector:*

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \text{const}, \quad (\vec{u}^2)^{\cdot} = 2\vec{u}\dot{\vec{u}} = 0 \rightarrow \dot{\vec{u}} \perp \vec{u}. \tag{5.3}$$

Produsul scalar fiind nul, $\dot{\vec{u}}$ este perpendicular pe $\vec{u}$ (aici derivata poate fi în raport cu un parametru oarecare). Exemple am întîlnit la deducerea formulei (1.22) (derivata unui versor este un vector perpendicular pe acel versor) sau a lui a_n din figura 1.11.

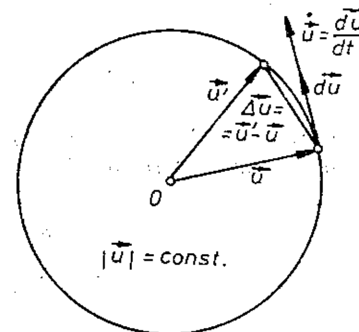


Fig. 5.2

Dacă vectorul $\vec{u}$ se mişcă prin translaţie, derivata sa este evident nulă, deoarece el nu suferă nici o variaţie: nici ca modul, nici ca direcţie sau sens, de aceea excludem acest caz banal. Atunci un vector de modul constant nu se poate lungi sau scurta, ci doar *roti*. Ducînd vectorul $\vec{u}$ dintr-un punct fix, vîrful său se va deplasa pe suprafaţa unei sfere de rază $|\vec{u}| = \text{const}$.

Creșterea sa finită $\Delta\vec{u}$ va fi coardă (secantă) la sferă, iar creșterea *infinitezimală* $d\vec{u}$ va fi *tangentă* la această sferă, deci perpendiculară pe rază, adică pe $\vec{u}$ (fig. 5.2). Prin urmare, în adevăr $\dot{\vec{u}} = d\vec{u}/dt$ este perpendicular pe $\vec{u}$, $(\vec{u}\, d\vec{u} = 0)$.

Derivata $\dot{\vec{u}}$ are semnificația *vitezei* de variație a vectorului $\vec{u}$ sau a vitezei de deplasare a vîrfului vectorului $\vec{u}$. De aceea se poate introduce viteza unghiulară momentană (sau instantanee) $\vec{\omega}$ de rotație a vectorului $\vec{u}$:

$$\dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \times \vec{u}, \quad |\vec{u}| = \text{const}, \quad \vec{\omega} \perp \dot{\vec{u}}. \tag{5.4}$$

Vectorul $\vec{\omega}$ nu este complet determinat, dar trebuie să fie situat într-un plan perpendicular pe $\dot{\vec{u}}$ pentru ca $\vec{\omega} \times \vec{u}$ să dea corect direcția derivatei $\dot{\vec{u}}$, de exemplu:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{u^2}\, \vec{u} \times \dot{\vec{u}}, \; (\vec{\omega} \perp \vec{u} \text{ și } \vec{\omega} \perp \dot{\vec{u}}). \tag{5.5}$$

Un exemplu este mișcarea de rotație a rigidului din figura 5.1, în care vectorul de poziție $\vec{r}$ are modul constant și derivata sa $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ se exprimă prin (5.1).

Ținînd seama că derivata unui vector de *direcție fixă*, variabil doar în modul, este *paralelă* cu vectorul, putem enunța:

Teorema: Derivata unui vector *este în general* **oblică** *față de vector și se descompune într-o componentă longitudinală, paralelă cu vectorul dat, care provine din variația modulului, și o componentă transversală, normală pe vectorul dat, care provine din variația direcției vectorului.*

Exemple: Derivata vectorului de poziție $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ (viteza) este oblică față de $\vec{r}$ (v. § 8.5); derivata vitezei $\dot{\vec{v}} = \vec{a}$ (accelerația) este oblică față de viteza $\vec{v}$; derivata vitezei unghiulare $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ (accelerația unghiulară) este oblică față de $\vec{\omega}$ (față de axa de rotație, dacă aceasta își schimbă direcția în spațiu).

5.2.2. FORMULELE LUI POISSON

Teoremă. *Derivatele* **versorilor** *unui SC ortogonal mobil se exprimă în fiecare moment prin produsele vectoriale*

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i} = \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k},$$
$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j} = -\omega_z \vec{i} + \omega_x \vec{k}, \tag{5.6}$$
$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k} = \omega_y \vec{i} - \omega_x \vec{j},$$

unde $\vec{\omega}$ este un vector *unic determinat* (în general variabil), adică *rezultă dintr-o* **rotație** *infinitezimală cu viteza unghiulară momentană* $\vec{\omega}$.

Vom arăta că *există* o rotație momentană $\vec{\omega}$ care generează derivatele versorilor conform formulelor (5.6) și că această rotație $\vec{\omega}$ este *unică*.

Să demonstrăm întîi *unicitatea*. Dacă există doi vectori $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}'$ care satisfac (5.6), atunci trebuie să avem

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i} = \vec{\omega}' \times \vec{i} \rightarrow (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{i} = 0$$

sau

$$(\omega_z - \omega_z')\vec{j} - (\omega_y - \omega_y')\vec{k} = 0$$

deci

$$\omega_z = \omega_z', \; \omega_y = \omega_y'$$

(un vector este nul dacă componentele sale sînt nule).

Analog, din expresiile celorlalte derivate rezultă că și $\omega_x = \omega_x'$, adică $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}'$.

Să demonstrăm acum *existența* vectorului $\vec{\omega}$ (în cazul translației lui SC, versorii nu suferă nici o variație și evident $\vec{\omega} \equiv 0$).

Conform lemei precedente, $\dot{\vec{i}}$ este perpendicular pe $\vec{i}$, deci se descompune după versorii $\vec{j}$, $\vec{k}$. Analog se descompun celelalte derivate:

$$\dot{\vec{i}} = 0 + a_{12}\vec{j} + a_{13}\vec{k},$$
$$\dot{\vec{j}} = a_{21}\vec{i} + 0 + a_{23}\vec{k},$$
$$\dot{\vec{k}} = a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + 0.$$

Deoarece însă,

$$\vec{i}\vec{j} = 0 \rightarrow (\vec{j}\vec{i})^{\cdot} = \dot{\vec{i}}\vec{j} + \vec{i}\dot{\vec{j}} = 0,$$

din primele două descompuneri, prin înmulțire scalară cu $\vec{j}$, respectiv $\vec{i}$, rezultă

$$\dot{\vec{i}}\vec{j} = a_{12}, \quad \vec{i}\dot{\vec{j}} = a_{21}, \quad \text{deci } a_{21} = -a_{12}$$

și analog $a_{31} = -a_{13}$, $a_{32} = -a_{23}$. Prin urmare, matricea coeficienților a_{ij} este antisimetrică: $a_{ij} = -a_{ji}$ și depinde deci numai de 3 parametri independenți. Prin comparare cu formulele (5.6) rezultă imediat că vectorul $\vec{\omega}$ **căutat** este

$$\omega_x = a_{23} = \dot{\vec{j}}\vec{k}, \quad \omega_y = a_{31} = \dot{\vec{k}}\vec{i}, \quad \omega_z = a_{12} = \dot{\vec{i}}\vec{j},$$
$$\vec{\omega} = \vec{i}(\dot{\vec{j}}\vec{k}) + \vec{j}(\dot{\vec{k}}\vec{i}) + \vec{k}(\dot{\vec{i}}\vec{j}). \tag{5.7}$$

Observație. De fapt rotația este totdeauna descrisă de o matrice (tensor) **antisimetrică** $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ și numai în spațiul *tri*dimensional i se poate asocia un vector dual $\vec{\omega}$ **de-a lungul** normalei la planul rotației (vector axial; mai sus $\omega_{ik} = a_{ik}$).

5.3. DISTRIBUȚIA VITEZELOR

5.3.1. FORMULELE LUI EULER

Să introducem un sistem de coordonare S' legat rigid (invariabil) de corp și care se mișcă deci solidar cu corpul, numit SC **propriu.** Conform figurii 5.3 :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}',$$

unde $\vec{r}'$ *este fix față de* S' (adică x', y', z' fixe), dar se mișcă față de sistemul de coordonate S, odată cu S'. Prin derivare obținem

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}', \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0, \quad \dot{\vec{r}}' = x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' + z'\dot{\vec{k}}', \tag{5.8}$$

unde $\vec{v}$ este viteza punctului P, iar $\vec{v}_0$ — viteza punctului O'.

Aplicînd formulele lui Poisson, avem

$$\dot{\vec{r}}' = x'\vec{\omega} \times \vec{i}' + y'\vec{\omega} \times \vec{j}' + z'\vec{\omega} \times \vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{r}', \tag{5.9}$$

astfel încît obținem *formulele lui Euler* :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot}, \tag{5.10}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{tr}, \quad \vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{5.11}$$

ceea ce înseamnă că deplasarea infinitezimală a solidului $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ se descompune în fiecare moment într-o translație infinitezimală $d\vec{r}_0 = \vec{v}_0\,dt$ și o rotație infinitezimală $d\vec{r}' = \vec{v}_{rot}\,dt$ în jurul unei axe trecînd prin O', cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ ($\vec{v}_0$ și $\vec{\omega}$ sînt în general funcții de timp).

Teoremă. *În fiecare moment viteza oricărui punct P al rigidului este egală cu viteza unui alt punct* **oarecare** *O' al rigidului,* $\vec{v}_0$, *plus o viteză de rotație în jurul unei axe trecînd prin* **acel** *punct O',* $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$, *adică mișcarea rigidului se descompune în mișcarea de translație a unui punct* **oarecare** *al rigidului plus o rotație în jurul unei axe trecînd prin* **acest** *punct.*

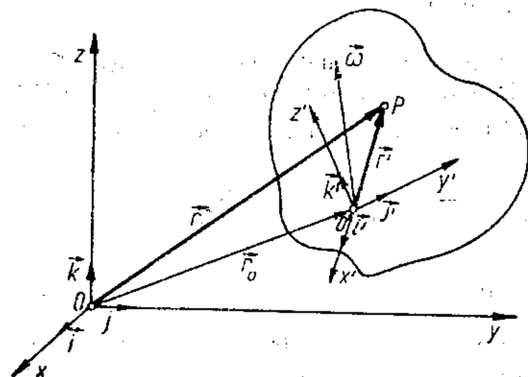


Fig. 5.3

Descompunerea în translație și rotație se poate face într-o infinitate de moduri după alegerea arbitrară a punctului de reducere O' numit *pol* și plasarea acolo a axei de rotație, adică a vectorului $\vec{\omega}$.

5.3.2. INVARIANȚII

Vom demonstra că oricare ar fi descompunerea, viteza unghiulară $|\vec{\omega}|$, direcția axei de rotație și componenta translației în direcția axei de rotație, sînt *aceleași* (fig. 5.4).

Teorema 1. *Viteza unghiulară* ω *este o caracteristică intrinsecă a mișcării corpului, adică modulul și direcția vectorului* $\vec{\omega}$ *sînt independente de sistemul de coordonate* S' *propriu ales, doar axa de rotație se deplasează* *paralel* *cu ea însăși în noul pol ales. Cu alte cuvinte, prin schimbarea polului, vectorul* $\vec{\omega}$ *se deplasează* **echipolent** *în noul pol.*

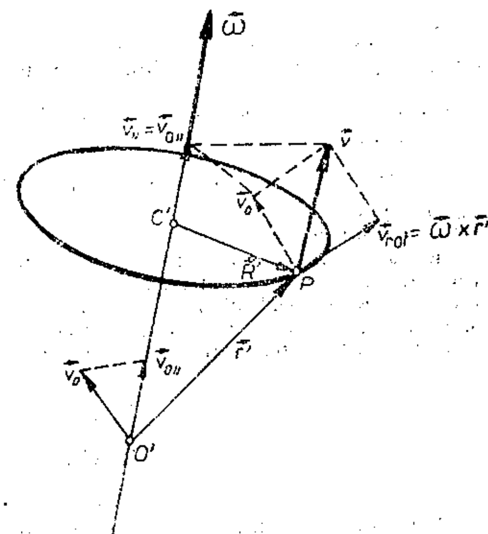


Fig. 5.4

În adevăr, putem trece de la S' inițial la oricare altul S'', în două etape : Întîi rotim S' astfel încît axele să devină paralele cu S'', atunci $\vec{\omega}$ devine $\vec{\omega}'$ față de S' rotit, dar din condiția

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega}' \times \vec{r}',$$

rezultă

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{r}' = 0 \rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}',$$

deoarece $\vec{r}'$ este *arbitrar.* Acum trecem de la acest sistem rotit la cel final S'', printr-o translație. Dar o translație nu afectează derivatele versorilor, deci $\vec{\omega}'$ nu se schimbă și rămîne egal cu $\vec{\omega}$.

Teorema 2. *Toate punctele corpului au în fiecare moment aceeași proiecție (componentă longitudinală) a vitezei pe axa de rotație,* independentă de S' propriu ales. Aceasta este cea de-a doua caracteristică intrinsecă a mișcării corpului.

În adevăr, înmulțind relația (5.10) scalar cu $\vec{\omega}$ și ținînd seama că $\vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_{rot}$ este perpendicular pe $\vec{\omega}$ și deci produsul lor scalar este nul, obținem

$$\vec{\omega}\vec{v} = \vec{\omega}\vec{v}_0, \text{ adică } \omega v \cos(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega v_0 \cos(\vec{\omega}, \vec{v}_0),$$

de unde

$$v_{||} = v\cos(\vec{\omega}, \vec{v}) = v_{0||} = v_0 \cos(\vec{\omega}, \vec{v}_0). \tag{5.12}$$

Prin urmare, toate punctele corpului au aceeași proiecție $v_{||}$ a vitezei pe axa de rotație, adică aceeași componentă longitudinală a vitezei, egală cu viteza de translație de-a lungul axei de rotație, $v_{0||}$. Deoarece viteza de translație este viteza punctului ales drept pol și deoarece axa de rotație se poate deplasa doar *paralel*, este clar că oriunde am alege polul obținem aceeași componentă longitudinală a translației — *rotația* generează numai viteze *perpendiculare* pe axa de rotație !

În rezumat, *putem deplasa vectorul $\vec{\omega}$ paralel cu el însuşi (echipolent), schimbînd polul şi* **schimbînd corespunzător** *doar componenţa* **transversală** *a translaţiei, cea longitudinală neputînd fi schimbată. Produsul scalar $\vec{\omega}\vec{v}$ este un invariant.*

Observaţie Introducerea sistemului propriu S' ne-a servit aici doar ca un artificiu pentru a putea aplica formulele lui Poisson, deci a arăta existenţa unui $\vec{\omega}$ *unic* pentru rigid (5.9) şi a deduce astfel formulele lui Euler (5.10), de aceea toate formulele care urmează se referă la SL.

Exemplu. Mişcarea de rostogolire fără lunecare a unui cilindru de rază R pe un plan poate fi privită ca o rotaţie cu viteza unghiulară ω în jurul axei cilindrului plus o translaţie cu viteza $v = \omega R$, perpendiculară pe axă, deci $v_{\parallel} = 0$, sau, altfel, ca o rotaţie de *aceeaşi* viteză unghiulară ω în jurul generatoarei de contact cu planul (axă momentană de rotaţie, mobilă; Descartes 1638) şi *fără* viteză de translaţie, ş.a.m.d.

5.4. MIŞCAREA ELICOIDALĂ

Teorema lui Chasles: *Mişcarea infinitezimală a unui rigid se descompune în fiecare moment, într-o rotaţie infinitezimală în jurul unei axe instantanee şi o translaţie infinitezimală* **de-a lungul** *acestei axe (mişcare elicoidală momentană).*

În adevăr, dacă translaţia momentană $\vec{v}_0$ (viteza punctului O') nu este paralelă cu axa de rotaţie $\vec{\omega}$ din O', putem anula componenta transversală a translaţiei deplasînd *paralel* axa de rotaţie, de exemplu, în punctul următor:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_0 + \vec{r}_c', \text{ unde } \vec{r}_c' = \frac{1}{\omega^2}\vec{\omega} \times \vec{v}_0. \tag{5.13}$$

Noua viteză de translaţie $\vec{v}_c$ dată de acest pol $\vec{r}_c$ este egală cu componenta longitudinală a lui $\vec{v}_0$, adică este paralelă cu noua axă de rotaţie $\vec{\omega}_c$ dusă prin $\vec{r}_c$. În adevăr, folosind formula dezvoltării produsului vectorial dublu (1.82), avem pentru viteza punctului $\vec{r}_c$:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_c' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \times \vec{v}_0) = \vec{\omega}\left(\frac{\vec{\omega}\vec{v}_0}{\omega^2}\right), \tag{5.14}$$

deci $\vec{v}_c$ este paralel cu $\vec{\omega}$.

Viteza de translaţie $\vec{v}_c$ în lungul axei de rotaţie $\vec{\omega}_c \parallel \vec{\omega}$ coincide cu proiecţia vitezelor $\vec{v}$ pe axa $\vec{\omega}$: înmulţind (5.14) scalar cu $\vec{\omega}$ avem, conform lui (5.12),

$$\omega v_c = \vec{\omega}\vec{v}_c = \vec{\omega}\vec{v}_0 = \vec{\omega}\vec{v} = \omega v_{\parallel}, \ (\vec{\omega}_c = \vec{\omega}) \rightarrow v_c = v_{\parallel} = v_{0\parallel}. \tag{5.15}$$

Prin urmare, *în fiecare moment, corpul execută o mişcare elicoidală infinitezimală*, analoagă mişcării unui *şurub* (şurub drept dacă $\vec{\omega}\vec{v} > 0$ şi stîng dacă $\vec{\omega}\vec{v} < 0$). Axa elicoidală (I. Mozzi 1766) este locul geometric al punctelor care au viteza minimă în momentul considerat.

Dacă $\vec{v}_0$, $\vec{\omega}$ sînt constante, mişcarea elicoidală se numeşte *uniformă*. Dacă în plus $v_0 = 0$, mişcarea este o rotaţie uniformă. În general însă, axa elicoidală variază atît faţă de corp, descriind o suprafaţă riglată numită *axoidă mobilă*, cît şi faţă de reperul fix, descriind o suprafaţă riglată numită *axoidă fixă*.

În fiecare moment deplasarea solidului reprezintă o rostogolire a axoidei mobile, legată rigid de corp, peste axoida fixă, în jurul axei elicoidale $\vec{\omega}_c$ (generatoarea de contact dintre axoide) plus o translaţie $\vec{v}_c$ de-a lungul acestei axe (Louis Poinsot 1834).

5.5. DISTRIBUŢIA ACCELERAŢIILOR

Derivînd (5.10) şi folosind (5.9), obţinem:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{v}}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega; \tag{5.16}$$

$$\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0, \ \vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}', \ \vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rot}. \tag{5.17}$$

Primul termen reprezintă acceleraţia *translaţiei* $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0$. Al doilea termen reprezintă contribuţia acceleraţiei *unghiulare* $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$, datorită neuniformităţii rotaţiei, se numeşte acceleraţie „*rotitoare*" şi se anulează în cazul rotaţiei uniforme cînd $\vec{\omega} =$ const. Al treilea termen reprezintă acceleraţia „*axipetă*", perpendiculară pe axa de rotaţie (a nu se confunda cu acceleraţia $\vec{a}_n$, perpendiculară pe traiectorie).

În adevăr, fie $\vec{n}'$ versorul normalei, coborîte din punctul P pe axa de rotaţie şi R' distanţa punctului P pînă la axă: $\vec{R}' = \overrightarrow{C'P} = -R'\vec{n}'$. A nu se confunda versorul $\vec{n}' \perp \vec{\omega}$ cu versorul $\vec{n}$ al normalei principale la traiectorie, şi distanţa R' pînă la axa $\vec{\omega}$ cu raza de curbură R a traiectoriei.

Atunci $\vec{r}' = \overrightarrow{O'C'} + \vec{R}'$ (fig. 5.5) şi ultimul termen

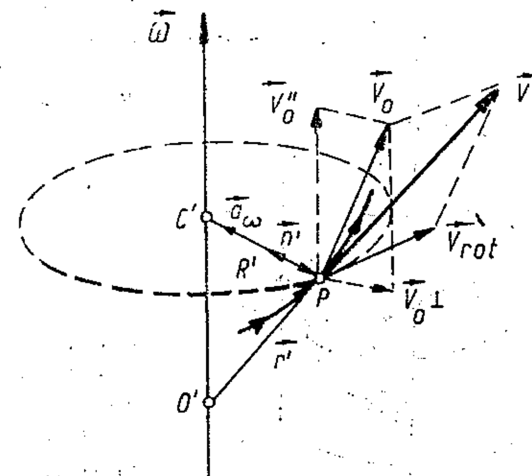


Fig. 5.5

din (5.16) devine ($\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{R}'$):

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = -\omega^2 \vec{R}' = \omega^2 R' \vec{n}' \qquad (5.18)$$

(deoarece $\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'C'} = 0$ şi $\vec{\omega}\vec{R}' = 0$), deci reprezintă o acceleraţie perpendiculară pe axa de rotaţie:

$$\vec{a}_\omega = -\omega^2 \vec{R}' = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} = -\frac{1}{R'^2} v_{\text{rot}}^2 \vec{R}', \qquad (5.19)$$

$$a_\omega = \omega^2 R' = \omega v_{\text{rot}} = \frac{1}{R'} v_{\text{rot}}^2, \quad (v_{\text{rot}} = \omega R').$$

Acum (5.16) se mai poate scrie astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{R}' \text{ (teorema lui Rivals).} \qquad (5.20)$$

Exemple. a) Dacă direcţia axei de rotaţie (deci a vectorului $\vec{\omega}$) *nu se schimbă*, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ va fi paralel cu $\vec{\omega}$ şi $\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}'$. În acest caz $\vec{a}_\varepsilon$ şi $\vec{a}_\omega$ sînt exact acceleraţiile tangenţială şi normală în mişcarea de rotaţie momentană a rigidului în jurul axei trecînd prin pol, adică *acceleraţia oricărui punct al rigidului este egală cu acceleraţia unui alt punct oarecare (pol) al rigidului $\vec{a}_0$, plus acceleraţia ($\vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_{t'} + \vec{a}_{n'}$) care provine din rotaţia momentană a rigidului în jurul unei axe trecînd prin pol*, analog descompunerii vitezelor.

b) În cazul mişcării de rotaţie în jurul *axei fixe*, fără translaţie: $a_0 = 0$, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} \parallel \vec{\omega}$ şi $\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}'$ coincide cu acceleraţia tangenţială $\vec{a}_t$, iar $\vec{a}_\omega = -\omega^2 \vec{R}'$ coincide cu acceleraţia normală $\vec{a}_n$. În acest caz $\vec{n}' = \vec{n}$ — versorul normalei principale la traiectorie, $R' = R$ — raza de curbură (ca la mişcarea circulară) (fig. 1.12) şi acceleraţia devine:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}, \; a_t = \varepsilon R, \qquad (5.21)$$

$$\vec{a}_\omega = \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{1}{R^2} v_{\text{rot}}^2 \vec{R}, \; a_n = \omega^2 R,$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \; (R' = R).$$

c) În cazul mişcării *elicoidale uniforme* ($\vec{v}_0 \parallel \vec{\omega}$): $\vec{a}_0 = 0$, $\vec{\varepsilon} = 0$ şi $\vec{a}$ coincide cu $\vec{a}_n$ ($\vec{n}' = \vec{n}$, R' — raza cilindrului pe care este înfăşurată elicea, R — raza de curbură a traiectoriei, adică a elicei) (fig. 5.6):

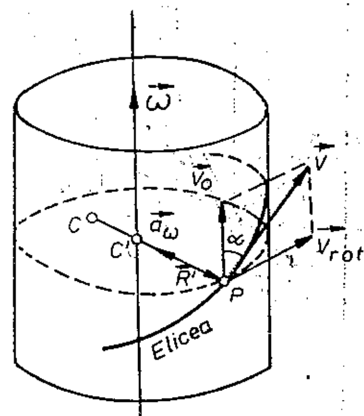


Fig. 5.6

$$\vec{a} = \vec{a}_\omega = \vec{a}_n = \frac{1}{R'} v_{\text{rot}}^2 \vec{n} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{R'} \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n},$$

$$R = R'/\sin^2 \alpha, \qquad (5.22)$$

unde α este unghiul dintre $\vec{v}$ şi $\vec{\omega}$ (unghiul de înclinare al elicei), iar $R = R'/\sin^2 \alpha$ este raza de curbură a elicei.

În general însă, $\vec{a}_\varepsilon$ nu coincide cu acceleraţia tangenţială $\vec{a}_t$ şi $\vec{a}_\omega$ nu coincide cu acceleraţia normală $\vec{a}_n$.

5.6. MIŞCAREA PLAN-PARALELĂ

În această mişcare traiectoriile punctelor solidului sînt paralele cu un plan fix. Toate punctele solidului situate pe o normală la acel plan se mişcă identic. De aceea mişcarea plan-paralelă se reduce la mişcarea unei figuri plane (o secţiune a corpului paralelă cu planul fix) în planul său (mişcare plană).

Vectorii $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ sînt conţinuţi în planul figurii (Oxy), iar vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ sînt perpendiculari pe plan ($\dot{\vec{k}} = 0$). Notăm $\omega_z = \omega$, $\varepsilon_z = \varepsilon$, $\omega > 0$ înseamnă rotaţia în sens trigonometric.

5.6.1. DISTRIBUŢIA VITEZELOR

În fiecare moment mişcarea corpului se compune din mişcarea unui punct arbitrar al său plus o rotaţie momentană în jurul acestui punct (pol), adică *viteza oricărui punct este egală cu viteza polului (ales arbitrar) plus o viteză de rotaţie momentană în jurul polului.*

Translaţia, fiind conţinută în planul figurii, este perpendiculară pe axa de rotaţie, deci poate fi desfiinţată, mutînd axa convenabil într-un punct C care se cheamă *centru instantaneu de rotaţie* (în planul fix) sau *centrul vitezelor* (în planul mobil al figurii), deoarece viteza sa este nulă în acel moment (fig. 5.7). În cazul translaţiei pure a figurii centrul instantaneu este aruncat la infinit pe direcţia perpendiculară pe translaţie.

Vectorul de poziţie sau coordonatele centrului instantaneu C sînt date de (5.13):

$$\vec{r}_c = \vec{r}_0 + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_0,$$

$$\vec{r}_c' = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_0, \qquad (5.23)$$

deoarece viteza acestui punct, $\vec{v}_c$ (5.14), în cazul mişcării plane este nulă ($\vec{\omega}\vec{v}_0 = 0$). Luînd pe C drept pol, avem $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$, ($\vec{r}' = \overrightarrow{CP}$), adică vitezele tuturor punctelor figurii sînt în fiecare moment perpendiculare pe razele care le unesc cu centrul instantaneu C şi au valoarea $\omega r' = \omega \cdot CP$, ceea ce corespunde rotaţiei momentane a figurii în jurul centrului C cu viteza unghiulară momentană ω (fig. 5.8).

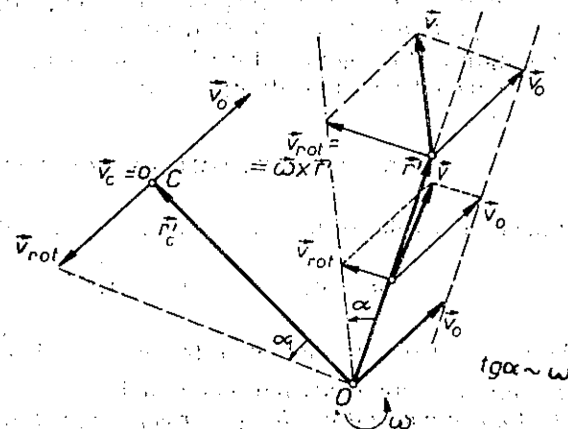


Fig. 5.7

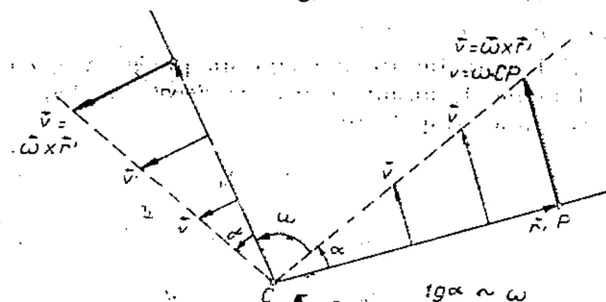


Fig. 5.8

Locul geometric al centrelor instantanee de rotaţie se numeşte *centroidă fixă* (sau *bază*) în S, respectiv *centroidă mobilă* (*rostogolitoare* sau *rulantă*) în S'. Axoidele rigidului sînt în cazul nostru suprafeţe cilindrice cu generatoarele perpendiculare pe planul dat, iar intersecţia lor cu acest plan dă centroidele.

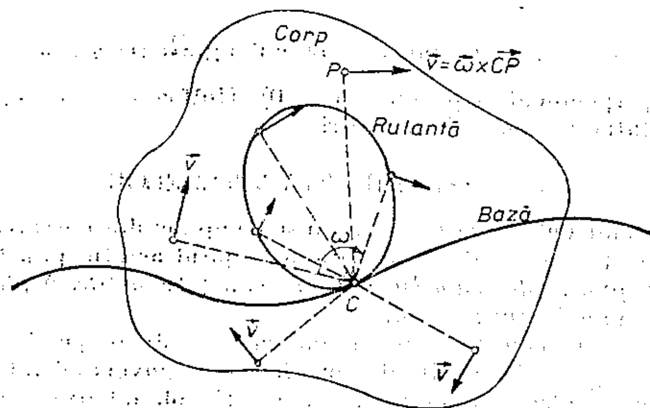


Fig. 5.9

În fiecare moment mişcarea figurii plane reprezintă o rostogolire fără lunecare a rulantei peste bază (mişcare epicicloidală). Punctul lor de contact este centrul instantaneu de rotaţie C (centrul vitezelor).

Exemplu: Rostogolirea fără lunecare a unui cerc (elipsă, parabolă etc.) peste o curbă fixă (linie dreaptă, alt cerc etc.) (fig. 5.9).

5.6.2. DISTRIBUŢIA ACCELERAŢIILOR

Formula acceleraţiilor (5.20) devine în cazul plan:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}', \qquad (5.24)$$

unde $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ este perpendicular pe plan ca şi $\vec{\omega}$, deci $\vec{a}_\varepsilon$ este perpendicular pe $\vec{r}'$, iar $\vec{a}_\omega$ este centripet către pol.

În fiecare moment acceleraţia oricărui punct este egală cu acceleraţia polului ales arbitrar ($\vec{a}_0$) plus o acceleraţie datorită rotaţiei momentane în jurul polului ($\vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_{t'} + \vec{a}_{n'}$).

Există în fiecare moment un punct W a cărui acceleraţie este nulă în acel moment, numit *centrul acceleraţiilor*. Din (5.24) rezultă atunci pentru acest punct (fig. 5.10):

$$\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{a}_0 = -\vec{a}_\varepsilon - \vec{a}_\omega, \quad \vec{a}_\varepsilon \perp \vec{a}_\omega,$$

$$|\vec{a}_0| = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}'| = r'\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$r'_w = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_\varepsilon}{a_\omega} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad \vec{r}'_w = \frac{\omega^2 \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{a}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (5.25)$$

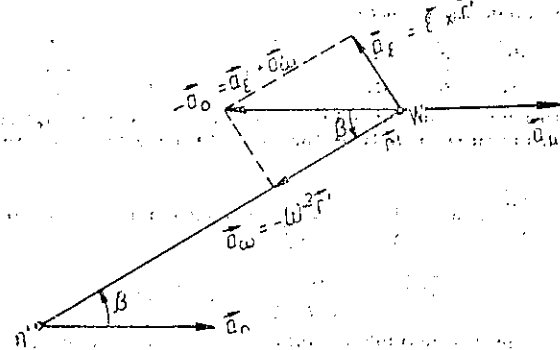


Fig. 5.10

Observăm că, spre deosebire de centrul vitezelor C, poziţia lui W depinde de neuniformitatea rotaţiei (de ε). În cazul rostogolirii uniforme ($\varepsilon = 0$) a rulantei peste bază, centrul acceleraţiilor se numeşte centrul *geometric* al acceleraţiilor (G).

Luînd pe W drept pol (fig. 5.11), rezultă imediat că acceleraţiile tuturor punctelor fac acelaşi unghi β ($\operatorname{tg} \beta = \varepsilon/\omega^2$, independent de $\vec{r}'$) cu razele care le unesc cu centrul acceleraţiilor W şi au valoarea $a = r'\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, ceea ce corespunde unei rotaţii momentane a figurii în jurul centrului W cu viteza şi acceleraţia unghiulare momentane ω şi ε.

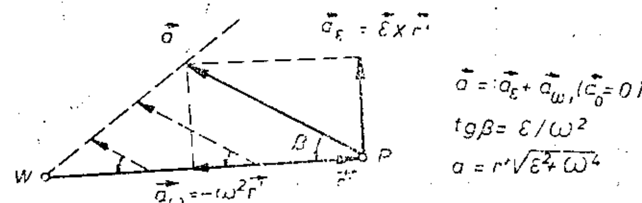


Fig. 5.11

Cele două rotaţii momentane ale figurii, considerate din punctul de vedere al distribuţiei vitezelor şi cel al distribuţiei acceleraţiilor, sînt deci *distincte* ($C \neq W$).

5.7. MIŞCAREA SFERICĂ

Un alt caz particular de mişcare a rigidului este mişcarea rigidului care are un *punct fix* (mişcarea sferică). În acest caz axoidele devin *conuri* cu vîrful comun în punctul fix şi mişcarea este reprezentată prin rostogolirea fără lunecare a conului mobil peste conul fix.

PROBLEME

5.1. Să se deducă *ecuaţia axei elicoidale*:

$$\vec{r}' = \vec{r}'_c + \lambda\vec{\omega} = \frac{1}{\omega^2}\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \lambda\vec{\omega}, \ \lambda - \text{parametru}.$$

Indicaţie. Dacă r'_c este lungimea perpendicularei din polul O' pe axa elicoidală, atunci trebuie să avem:

$$\vec{r}'_c = \mu\vec{\omega} \times \vec{v}_0 \text{ sau } r'_c = \mu\omega v_{0\perp} \text{ şi } v_{0\perp} = \omega r'_c.$$

5.2. Folosind formulele lui *Frénet*:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T},$$

unde T este raza de torsiune, şi formulele lui Poisson, să se arate că mişcarea triedrului Frénet asociat mobilului P în mişcarea sa pe traiectorie cu viteza v este o mişcare elicoidală cu parametrii:

$$\vec{v}_3 = v\,\frac{R(R\vec{t} + T\vec{b})}{R^2 + T^2}, \quad \vec{\omega} = v\left(\frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R}\right),$$ axa elicoidală $\vec{\omega}$ trece prin punctul

$$\overrightarrow{PH} = \frac{R\vec{n}}{1 + R^2/T^2} \quad \text{(fig. 5.12).}$$

5.3. Capetele unei tije AB de lungime l lunecă pe două drepte ortogonale Oxy. Să se afle: **a)** centrul vitezelor C; **b)** baza şi rostogolitoarea; **c)** centrul geometric al acceleraţiilor G.

R. Figura 5.13.

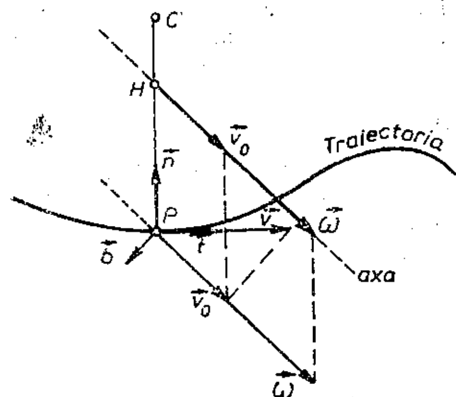


Fig. 5.12

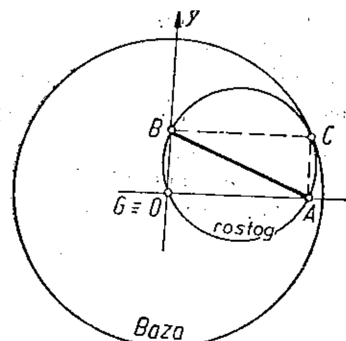


Fig. 5.13

5.4. Să se arate că: **a)** punctul C' al rigidului care coincide la un moment dat cu centrul vitezelor C are în acel moment acceleraţia $\vec{a}_{c'} = -\vec{\omega} \times \vec{u}_c$, unde $\vec{u}_c$ este viteza de deplasare a centrului C pe bază; **b)** traiectoria lui C' are în C un punct de întoarcere cu tangenta perpendiculară pe bază şi rostogolitoare (după normala lor comună); **c)** acceleraţia de mai sus este îndreptată spre centrul geometric al acceleraţiilor G a cărui poziţie este dată de vectorul (fig. 5.14):

$$\overrightarrow{CG} = -\frac{\vec{\omega} \times \vec{u}_c}{\omega^2}, \quad CG = \frac{u_c}{\omega}, \quad (\vec{u}_c = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CG}).$$

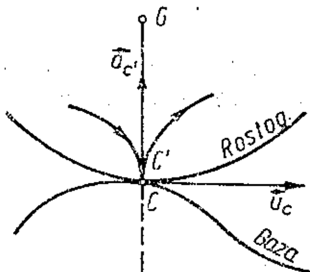


Fig. 5.14

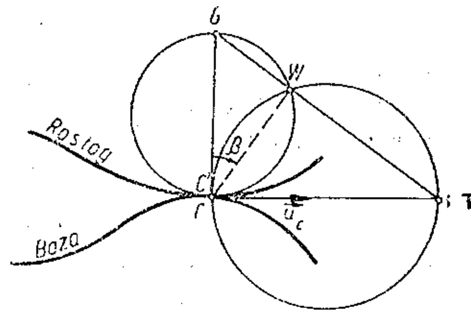


Fig. 5.15

5.5. Să se arate că punctele figurii plane care au la un moment dat acceleraţia normală nulă se găsesc pe cercul de diametru CG (numit cercul inflexiunilor, deoarece traiectoriile au acolo puncte de inflexiune), iar punctele figurii care au acceleraţia tangenţială nulă se găsesc pe un alt cerc de diametru $CT = \omega u_c/\varepsilon$ (CT este tangenta comună a axoidelor). Cele două cercuri se taie în C şi W (fig. 5.15).

5.6. Să se demonstreze relaţiile:

$$\vec{\omega} = \vec{v}_e \times \left(\frac{\vec{n}}{R} - \frac{\vec{n}'}{R'}\right), \quad \frac{1}{CG} = \frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R}, \quad (u_c = \omega \cdot CG),$$

unde $\vec{n}$, $\vec{n}'$, R, R' sînt versorii normalelor, respectiv razele de curbură ale axoidelor în punctul de contact C (centrul vitezelor), u_c este viteza de deplasare a centrului C pe bază; iar G este centrul geometric al acceleraţiilor.

5.7. Fie planul mobil legat solidar de axele intrinseci $P(\vec{t}, \vec{n})$ ale unui mobil P care se mişcă cu viteza v pe traiectoria sa plană. Să se arate că: **a)** $\omega = v/R$, unde R este raza de curbură; **b)** centrul vitezelor C este în centrul de curbură; **c)** acceleraţia tangenţială a mobilului $a_t = \dot{v} = \varepsilon R + \omega\dot{R}$; **d)** acceleraţia punctului C este $a_c = \omega\dot{R}$ şi este paralelă cu $\vec{t}$; **e)** viteza centrului C pe bază este $u_c = \dot{R}$ şi este paralelă cu $\vec{n}$ (fig. 5.16).

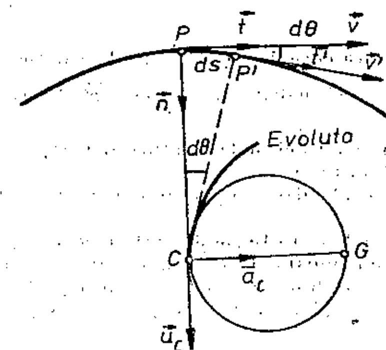


Fig. 5.16

5.8. Un cerc de rază R se rostogoleşte fără lunecare pe axa Ox cu viteza u. Să se afle: **a)** baza şi rostogolitoarea, poziţia centrului vitezelor; **b)** viteza ω şi acceleraţia ε ale cercului; **c)** coordonatele unui punct P de pe cerc în funcţie de unghiul θ dintre raza GP şi verticala GC (fig. 5.17); **d)** vitezele $v_{x,y}$, v ale punctului P; **e)** descompunerea vitezelor faţă de G; **f)** unghiul

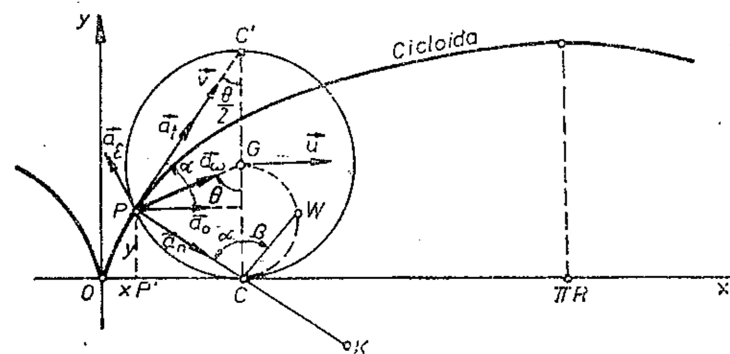


Fig. 5.17

$\alpha = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u})$; **g)** viteza v' a punctului superior C'; **h)** acceleraţiile $a_{x,y}$; **i)** descompunerea acceleraţiilor faţă de G; **j)** poziţiile centrelor acceleraţiilor; **k)** acceleraţia normală $\vec{a}_n$ şi poziţia centrului de curbură K al traiectoriei (cicloidei); **l)** lungimea s_0 a unei bucle a cicloidei.

R. a) Baza este axa Ox, iar rostogolitoarea este cercul ; centrul vitezelor în C ; b) $\omega = u/R$, $\varepsilon = \dot{u}/R$; c) cicloida : $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta) = 2R\sin^2\frac{\theta}{2}$; d) $v_x = u(1 - \cos\theta) = 2u\sin^2\frac{\theta}{2}$, $v_y = u\sin\theta$, $v = 2u\sin\frac{\theta}{2} = \omega\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2} = \omega\cdot CP$, $\vec{v}$ îndreptat spre C' ; e) $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{GP}$, $\vec{v}_{rot} = u(-\cos\theta,\ \sin\theta)$; f) $\alpha = \sphericalangle PCC' = \pi/2 - \theta/2$; g) $\vec{v}' = 2\vec{u}$; h) $a_x = \dot{u}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{R}u^2\sin\theta$, $a_y = \dot{u}\sin\theta + \frac{1}{R}u^2\cos\theta$; i) $\vec{a}_0 = (\dot{u},\ 0)$, $\vec{a}_\varepsilon = \dot{u}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ tangentă la cerc ($\perp\overrightarrow{GP}$), $\vec{a}_\omega = -\omega^2\overrightarrow{GP} = \frac{1}{R}u^2(\sin\theta,\ \cos\theta)$ radială (centripetă) spre G ; j) $u_c = u$, $CG = u_c/\omega = u/\omega = R$, deci în centrul cercului ; $CW = R\cos\beta$, unde $\mathrm{tg}\,\beta = \varepsilon/\omega^2 = \dot{u}R/u^2$; k) $a_n = \frac{1}{R}u^2\sin\frac{\theta}{2}$, $PK = 2PC$; l) $s_0 = 8R$.

5.9. O roată de rază r se rostogolește fără lunecare pe o altă roată fixă de rază R, în exterior sau interior, înconjurînd-o cu o frecvență n. Să se afle viteza unghiulară ω a roții r.

R. $\omega = 2\pi n(1 \pm R/r)$.

5.10. Să se compună mișcarea elicoidală $(\vec{v}, \vec{\omega})$ cu o translație $\vec{v}'$, sub unghiul α față de $\vec{\omega}$

R. Axa elicoidală se deplasează cu distanța $\frac{1}{\omega^2}\vec{\omega}\times\vec{v}'$; translația rezultantă $v + v'\cos\alpha$.

5.11. Să se compună două mișcări elicoidale antiparalele $(\vec{v}, \vec{\omega})$ și $(-\vec{v}, -\vec{\omega})$, ale căror axe elicoidale se află la distanța b între ele.

R. Translația $v_0 = \omega b$ perpendiculară pe planul axelor elicoidale (în sensul dat de regula burghiului).

5.12. Un con cu deschiderea 2α se rostogolește fără lunecare pe un plan orizontal, cu vîrful fix, măturînd planul cu viteza unghiulară Ω (perpendiculară pe plan). Să se afle viteza unghiulară proprie sau relativă ω_0 și cea absolută (sau rezultantă) ω ale conului.

R. Axoidele sînt planul orizontal și conul însuși. Axa elicoidală este generatoarea de contact, $\omega_0 = \Omega/\sin\alpha$, $\omega = \Omega\ \mathrm{ctg}\,\alpha$.

CAPITOLUL 6

DINAMICA SOLIDULUI RIGID

După cum am văzut, mișcarea solidului rigid se descompune într-o mișcare de *translație* și o mișcare de *rotație* în jurul unei axe instantanee :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}',\ \dot{\vec{r}}' = \vec{\omega}\times\vec{r}' = \vec{v}_{rot}. \qquad (6.1)$$

Dinamica mișcării de translație coincide cu dinamica punctului material. Să studiem acum *dinamica mișcării de rotație* a solidului rigid în jurul axei instantanee.

6.1. ENERGIA CINETICĂ DE ROTAȚIE

Alegînd un SC cu originea O pe axa de rotație (fig. 6.1 ; omitem aici accentele de pe coordonate pentru simplificare), să calculăm energia cinetică de rotație a rigidului :

$$E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{rot\,k}^2 \quad \text{sau} \quad E_{rot} = \int \frac{1}{2} v_{rot}^2\, dm. \qquad (6.2)$$

Ținînd seama că vitezele particulelor sînt

$$\vec{v}_{rot\,k} = \vec{\omega}\times\vec{r}_k = \vec{\omega}\times\vec{R}_k,\ v_{rot\,k} = \omega R_k,$$

$$v_{rot} = \omega R, \qquad (6.3)$$

unde $\vec{r}_k$ sînt vectorii de poziție și R_k *distanțele particulelor* m_k *pînă la axa de rotație*, obținem

$$E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k R_k^2\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2, \qquad (6.4)$$

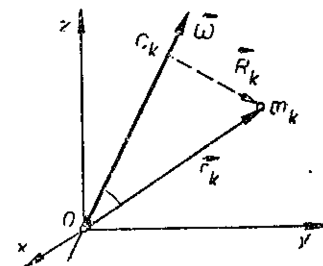


Fig. 6.1

unde

$$I \overset{\text{def}}{=} \sum_k m_k R_k^2 \qquad (6.5)$$

este *momentul de inerție al rigidului față de axa de rotație* (Ch. Huygens 1673).

În cazul distribuției continue de masă, suma de mai sus se înlocuiește cu integrala:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int R^2\, dm = \int R^2 \rho\, dV, \quad (dm = \rho\, dV), \tag{6.6}$$

unde R este distanța elementului de masă $dm = \rho\, dV$ pînă la axa de rotație.

6.2. MOMENTUL DE INERȚIE FAȚĂ DE O AXĂ

Momentul de inerție este o mărime *aditivă* în sensul că este egală cu *suma* momentelor de inerție ale *particulelor* componente ale corpului. Momentul de inerție al unui *punct material* față de o axă este egal cu produsul dintre masa punctului material și pătratul distanței sale pînă la axă: mR^2 (fig. 6.2):

$$I = \Sigma I_k = \Sigma m_k R_k^2, \text{ unde } I_k = m_k R_k^2. \tag{6.7}$$

Vom nota cu R_k distanțele pînă la *axă* și cu r_k distanțele pînă la *pol*.

Se numește *rază de inerție* sau de *girație* față de o axă, distanța R_g definită prin relația:

$$I = \Sigma m_k R_k^2 = m R_g^2 \text{ sau } I = \int R^2\, dm = m R_g^2, \ (m = \Sigma m_k), \tag{6.8}$$

$$R_g^2 = \frac{1}{m} \Sigma m_k R_k^2 \text{ sau } R_g^2 = \frac{1}{m} \int R^2\, dm, \ R_g \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{I/m}, \tag{6.9}$$

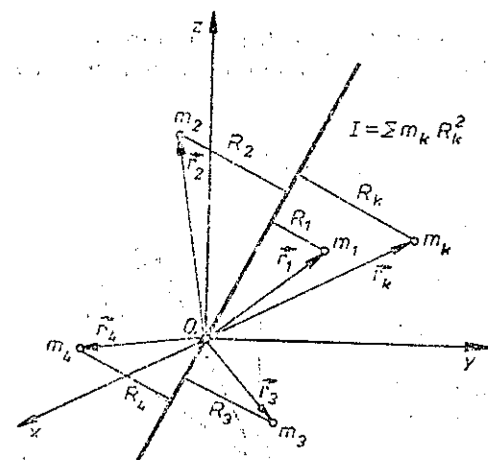


Fig. 6.2

adică **raza de inerție** R_g *este distanța de la axa dată unde ar trebui concentrată toată masa corpului pentru a da același moment de inerție față de acea axă.*

Dacă cunoaștem masele părților componente M_j și razele lor de girație R_{gj} față de o axă, atunci momentul de inerție al corpului întreg (compus) față de acea axă este evident:

$$I = \sum_j M_j R_{gj}^2 = \sum_j I_j, \ I_j = M_j R_{gj}^2, \tag{6.10}$$

fiindcă orice sumă *parțială* $\sum_{(j)} m_k R_k^2$ poate fi înlocuită cu momentul de inerție $M_j R_{gj}^2 = I_j$ al părții componente respective de masă M_j și rază de inerție R_{gj}.

Dimensiunile momentului de inerție sînt:

$$[I] \stackrel{\text{def}}{=} [m][R^2] = [ML^2 = \text{kg}\cdot\text{m}^2 \text{ în SI}. \tag{6.11}$$

Comparînd expresiile energiei cinetice de translație și de rotație:

$$E_{tr} = \frac{1}{2} m v_{tr}^2, \quad E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{6.12}$$

se vede că rolul masei m din mișcarea de translație îl joacă în mișcarea de rotație momentul de inerție I față de axa de rotație.

Așa cum masa unui corp este o măsură a inerției sale în mișcarea de translație, tot astfel *momentul de inerție față de o axă este o măsură a inerției corpului la mișcarea de rotație în jurul acelei axe.*

Valoarea momentului de inerție depinde nu numai de mărimea maselor particulelor corpului, ci și de modul cum sînt distribuite ele (adică distanțele lor) față de axa de rotație. La o aceeași masă totală, corpul care are masele *mai depărtate* de axă va avea un moment de inerție mai mare, de exemplu, momentul de inerție al unui inel (cilindru gol) este mai mare decît al unui disc (sau cilindru) omogen din același material și de *aceeași* masă, față de axa lor de simetrie. Pentru a obține un moment de inerție cît mai mare, materialul trebuie distribuit cît mai departe de axa de rotație.

6.3. LUCRUL MECANIC. PUTEREA

Lucrul mecanic elementar efectuat de forțele aplicate rigidului în rotație (la rigid forțele interne nu fac lucru mecanic) este (peste tot mai jos $\vec{v}_k \equiv \equiv \vec{v}_{rot\,k} = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \dot{\vec{r}}_k$):

$$dW_{rot} = \Sigma \vec{F}_k\, d\vec{r}_k = \Sigma \vec{F}_k \vec{v}_k\, dt = \Sigma \vec{F}_k(\vec{\omega} \times \vec{r}_k)dt = \Sigma \vec{\omega}(\vec{r}_k \times \vec{F}_k)dt = \vec{M}\vec{\omega}\, dt, \tag{6.13}$$

unde $\vec{M}$ este momentul rezultant al forțelor față de un pol de pe axa de rotație și unde am folosit proprietatea de simetrie ciclică a produsului vectorial mixt (1.81).

Puterea dezvoltată de forțele aplicate va fi deci

$$P_{rot} = \dot{W}_{rot} = \vec{M}\vec{\omega}, \tag{6.14}$$

analog puterii la translație $\vec{F}\vec{v}$. Forței de la mișcarea de translație îi corespunde *momentul forței* la mișcarea de rotație.

Într-un SR *inerțial* putem scrie teorema energiei cinetice:

$$dE_{rot} = d\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right) = dW_{rot} = \vec{M}\vec{\omega}\, dt, \ \dot{E}_{rot} = P_{rot} = \vec{M}\vec{\omega}, \tag{6.15}$$

$$W_{rot} = \int \vec{M}\vec{\omega}\, dt = \Delta E_{rot} = \Delta\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right), \tag{6.16}$$

ceea ce se obține și direct prin derivarea energiei cinetice:

$$\dot{E}_{rot} = \left(\frac{1}{2}\Sigma m_k v_k^2\right)^{\cdot} = \Sigma m_k \dot{\vec{v}}_k \vec{v}_k = \Sigma(\vec{F}_k + \vec{\mathcal{F}}_k)\vec{v}_k =$$

$$= \Sigma(\vec{F}_k + \vec{\mathcal{F}}_k)(\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \Sigma\vec{\omega}(\vec{r}_k \times \vec{F}_k) + \Sigma\vec{\omega}(\vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k) = \vec{M}\vec{\omega}.$$

6.4. MOMENTELE DE INERȚIE FAȚĂ DE UN SISTEM DE COORDONATE

Momentul de inerție al unui corp depinde de axa față de care se calculează, de aceea nu este o mărime scalară (descrisă de o singură funcție) și nici vectorială (descrisă față de un SC prin trei funcții), ci una mai complexă (tensorială).

În adevăr, să deducem expresia analitică a energiei cinetice de rotație *față de un* SC cu originea pe axa de rotație (fig. 6.1; omitem accentele pentru simplificare):

$$E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{rot\ k}^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k(\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^2$$

sau

$$E_{rot} = \int \frac{1}{2}\, v_{rot}^2\, dm = \int \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2\, dm;$$

$$E_{rot} = \Sigma \frac{1}{2} m_k[\vec{i}(\omega_y z_k - \omega_z y_k) + \vec{j}(\omega_z x_k - \omega_x z_k) + \vec{k}(\omega_x y_k - \omega_y x_k)]^2 =$$

$$= \Sigma \frac{1}{2} m_k[(\omega_y z_k - \omega_z y_k)^2 + (\omega_z x_k - \omega_x z_k)^2 + (\omega_x y_k - \omega_y x_k)^2];$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\omega_z^2 + + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x, \qquad (6.17)$$

unde

$$I_{xx} \overset{def}{=} \Sigma m_k(y_k^2 + z_k^2),\ I_{yy} = \Sigma m_k(z_k^2 + x_k^2),\ I_{zz} = \Sigma m_k(x_k^2 + y_k^2) \qquad (6.18)$$

se numesc *momente de inerție* față de axele de coordonate, iar

$$I_{xy} = I_{yx} \overset{def}{=} -\Sigma m_k x_k y_k,\ I_{yz} = I_{zy} = -\Sigma m_k y_k z_k,$$
$$I_{xz} = I_{zx} = -\Sigma m_k x_k z_k \qquad (6.18')$$

se numesc *momente centrifugale* (sau de deviație).

Momentele de inerție (6.18) sînt chiar momentele de inerție față de axele de coordonate în sensul în care am definit mai înainte, prin (6.5), momentul de inerție față de o axă ($y_k^2 + z_k^2$ este pătratul distanței particulei m_k pînă la axa Ox; $z_k^2 + x_k^2$ — pătratul distanței pînă la axa Oy etc.).

În cazul distribuției continue a masei, momentele de inerție sînt

$$I_{xx} \overset{def}{=} \int (y^2 + z^2)dm = \int (y^2 + z^2)\rho\, dV \text{ etc.} \qquad (6.19)$$

$$I_{xy} = I_{yx} \overset{def}{=} -\int xy\, dm = -\int xy\rho\, dV \text{ etc.}$$

Prin urmare, *energia cinetică de rotație este o* **formă pătratică** *în componentele vitezei unghiulare, ale cărei coeficienți sînt momentele de inerție.*

Momentele de inerție sînt descrise deci într-un SC prin 6 funcții și se reprezintă prin matricea *simetrică* (tensor de ordinul doi simetric):

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix},\ I_{xy} = I_{yx},\ \ldots, \qquad (6.20)$$

unde elementele diagonale sînt momentele de inerție față de axele de coordonate, iar elementele nediagonale sînt momentele de inerție centrifugale. A nu se confunda *matricea* momentelor de inerție $\hat{I}$ cu momentul de inerție față de o axă I.

6.5. MOMENTUL CINETIC DE ROTAȚIE

6.5.1. COMPONENTELE MOMENTULUI CINETIC

a) Față de un pol de pe axa de rotație a rigidului, ales drept *origine* a sistemului de coordonate (fig. 6.1), avem

$$\vec{J}_{rot} = \Sigma\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k = \Sigma\vec{r}_k \times m_k(\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \qquad (6.21)$$

sau

$$\vec{J}_{rot} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})dm = \int dm\vec{i}[y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] + + \ldots = \vec{i}J_x + \ldots \qquad (6.21')$$

cu componentele

$$J_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z,\ J_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z,$$
$$J_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \qquad (6.22)$$

care sînt *forme liniare* în componentele vitezei unghiulare.

De aici se vede că *în general* componentele momentului cinetic $\vec{J}$ nu sînt proporționale cu componentele corespunzătoare ale lui $\vec{\omega}$, adică *vectorul* $\vec{J}$ *nu este în general paralel cu vectorul* $\vec{\omega}$, deci *momentul cinetic* $\vec{J}$ *nu este în general paralel cu axa de rotație* ($\vec{\omega}$).

Dacă reprezentăm vectorii $\vec{J}$, $\vec{\omega}$ prin matrici *coloane*, putem scrie :

$$|J\rangle \equiv \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \hat{I}\,|\omega\rangle$$

sau

$$\vec{J} = \hat{I}\vec{\omega} \equiv \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\mathrm{d}m. \tag{6.23}$$

Într-un SR *inerțial* putem scrie teorema momentului cinetic :

$$\dot{\vec{J}}_{\mathrm{rot}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{I}\vec{\omega}) = \vec{M}, \quad \int \vec{M}\,\mathrm{d}t = \Delta(\hat{I}\vec{\omega}), \tag{6.24}$$

ceea ce se obține și direct prin derivarea momentului cinetic :

$$\dot{\vec{J}}_{\mathrm{rot}} = (\Sigma\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k)^{\cdot} = \Sigma\vec{r}_k \times m_k\dot{\vec{v}}_k = \Sigma\vec{r}_k \times (\vec{F}_k + \vec{\mathcal{F}}_k) = \Sigma\vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}.$$

6.5.2. FORME BILINIARE ȘI PĂTRATICE

Produsul scalar $\vec{a}\vec{b}$ a doi vectori *reali* se poate scrie ca produs dintre matricea *linie* a primului vector și matricea *coloană* a celui de-al doilea vector :

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = [a_x \;\; a_y \;\; a_z]\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = (\vec{a}, \vec{b}). \tag{6.25}$$

Vom reprezenta *vectorii* prin matrici *coloană*, iar *covectorii* prin matrici *linie* cu elemente — componentele *complex conjugate* ale vectorului respectiv :

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \text{— vector (bra) ; } \langle a| = [a_x^* \;\; a_y^* \;\; a_z^*] \text{ — covector (ket)}$$

(denumirile *bra* și *ket* au fost introduse de P.A.M. Dirac de la cuvîntul bracket = paranteză).

Produsul scalar se va defini atunci astfel :

$$\langle a|b\rangle = [a_x^* \;\; a_y^* \;\; a_z^*]\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z. \tag{6.26}$$

Pentru vectori reali regăsim expresia cunoscută de mai sus (6.25).

O expresie $\langle a|\hat{M}|b\rangle$ înseamnă o *formă biliniară* în vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și anume produsul scalar dintre vectorul $\vec{a}$ și vectorul $\hat{M}\vec{b}$ (care rezultă din

înmulțirea matricei pătrate $\hat{M}$ cu vectorul-coloană $\vec{b}$) sau altfel, este produsul dintre covectorul $\langle a|$ — matrice *linie* a vectorului $\vec{a}$ complex conjugat și vectorul $\hat{M}|b\rangle$ — matrice coloană care rezultă din înmulțirea matricei $\hat{M}$ cu vectorul $|b\rangle$ — matrice coloană a vectorului $\vec{b}$:

$$\langle a|\hat{M}|b\rangle = [a_x^* \;\; a_y^* \;\; a_z^*]\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} =$$

$$= [a_x^* \;\; a_y^* \;\; a_z^*]\begin{bmatrix} M_{xx}b_x + M_{xy}b_y + M_{xz}b_z \\ M_{yx}b_x + M_{yy}b_y + M_{yz}b_z \\ M_{zx}b_x + M_{zy}b_y + M_{zz}b_z \end{bmatrix} =$$

$$= a_x^* M_{xx} b_x + a_y^* M_{yy} b_y + a_z^* M_{zz} b_z + a_x^* M_{xy} b_y + a_y^* M_{yx} b_x + a_y^* M_{yz} b_z +$$
$$+ a_z^* M_{zy} b_y + a_z^* M_{zx} b_x + a_x^* M_{xz} b_z = M_{xx} a_x^* b_x + M_{yy} a_y^* b_y + M_{zz} a_z^* b_z +$$
$$+ M_{xy} a_x^* b_y + M_{yx} a_y^* b_x + M_{yz} a_y^* b_z + M_{zy} a_z^* b_y + M_{zx} a_z^* b_x + M_{xz} a_x^* b_z. \tag{6.27}$$

Se poate verifica ușor proprietatea :

$$\langle a|\hat{M}|b\rangle^* = \langle b|\hat{M}^+|a\rangle, \quad \hat{M}^+ = \tilde{\hat{M}}^*, \tag{6.28}$$

unde $\hat{M}^+$ este matricea *hermitic conjugată* (transpusă și complex conjugată). Dacă matricea $\hat{M}$ este *hermitiană* (după numele lui Hermite), adică hermitic *auto*conjugată : $\hat{M}^+ = \hat{M}$, atunci

$$\langle a|\hat{M}|b\rangle^* = \langle b|\hat{M}|a\rangle \; ; \; \langle a|\hat{M}|a\rangle^* = \langle a|\hat{M}|a\rangle, \text{ dacă } \hat{M}^+ = \hat{M}, \tag{6.29}$$

deci forma pătratică respectivă este *reală*.

În particular, în cazul *real*, cînd vectorii și matricile au componente *reale*, avem

$$(\vec{a}, \hat{M}\vec{b}) = (\vec{b}, \tilde{\hat{M}}\vec{a}). \tag{6.28'}$$

Condiția de hermicitate devine condiția de *simetrie* : $\tilde{\hat{M}} = \hat{M}$. Dacă matricea $\hat{M}$ este simetrică (și reală) avem

$$(\vec{a}, \hat{M}\vec{b}) = (\vec{b}, \hat{M}\vec{a}), \text{ dacă } \tilde{\hat{M}} = \hat{M}, \tag{6.29'}$$

iar forma pătratică se scrie în acest caz desfășurat astfel :

$$(\vec{a}, \hat{M}\vec{a}) = M_{xx}a_x^2 + M_{yy}a_y^2 + M_{zz}a_z^2 + 2M_{xy}a_x a_y + 2M_{yz}a_y a_z + 2M_{zx}a_z a_x. \tag{6.29''}$$

6.5.3. ENERGIA CINETICĂ DE ROTAȚIE

Relația (6.17) se scrie acum cu ajutorul matricei momentelor de inerție $\hat{I}$ (6.21) ca *formă pătratică*

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \hat{I}\vec{\omega}) \equiv \frac{1}{2}\int(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \tag{6.30}$$

și ținînd seama de expresia momentului cinetic (6.23), putem scrie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \hat{I}\vec{\omega}) = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{J}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{J} = \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{6.31}$$

analog energiei cinetice de translație

$$E_{tr} = \frac{1}{2}\vec{v}m\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{v}\vec{p} = \frac{1}{2}mv^2, \tag{6.32}$$

numai că $\vec{J}$ *nu* este în general paralel cu $\vec{\omega}$.

Deoarece $E_{rot} > 0$, rezultă $\cos\alpha > 0$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică $\vec{J}$ formează totdeauna un unghi ascuțit cu vectorul $\vec{\omega}$.

Notînd cu $\vec{n}$ versorul axei

$$\vec{n} = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z) = \vec{\omega}/\omega, \tag{6.33}$$

putem exprima momentul de inerție I față de axă prin matricea momentelor de inerție $\hat{I}$, ca formă pătratică în cosinusurile directoare (A. L. Cauchy 1827):

$$I = (\vec{n}, \hat{I}\vec{n}) = I_{xx}\cos^2\alpha_x + \ldots + 2I_{xy}\cos\alpha_x\cos\alpha_y + \ldots, \tag{6.34}$$

expresie care rezultă ușor din (6.31) punînd $\vec{\omega} = \vec{n}\omega$.

6.5.4. MOMENTUL CINETIC ÎN RAPORT CU AXA

Proiecția momentului cinetic $\vec{J}$ pe axa de rotație (momentul cinetic în raport cu axa) se poate găsi imediat prin compararea expresiilor energiei cinetice:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{J}\vec{\omega} = \frac{1}{2}J\omega\cos(\vec{J}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2}J_{\parallel}\omega, \text{ dar } E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

de unde (fig. 6.3):

$$J_{\parallel} = I\omega, \quad \vec{J}_{\parallel} = I\vec{\omega}, \tag{6.35}$$

deci $I\vec{\omega}$ ne dă numai componenta longitudinală a momentului cinetic, paralelă cu axa de rotație, adică ne dă momentul cinetic în raport cu axa de rotație.

Expresia lui $J_{\parallel}$ se poate obține și direct. Avem din figura 6.1:

$$\vec{J}_{rot} = \sum\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k = \sum(\overrightarrow{OC}_k + \vec{R}_k) \times m_k\vec{v}_k,$$

cum $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{\omega} \times \vec{R}_k$ este transversal, componenta *longitudinală* este dată de termenul al doilea:

$$\vec{J}_{\parallel} = \sum\vec{R}_k \times m_k\vec{v}_k = \sum\vec{R}_k \times m_k(\vec{\omega} \times \vec{R}_k) =$$
$$= \sum m_k R_k^2\vec{\omega} = I\vec{\omega},$$

unde am dezvoltat dublul produs vectorial după (1.82) și $\vec{\omega}\vec{R}_k = 0$.

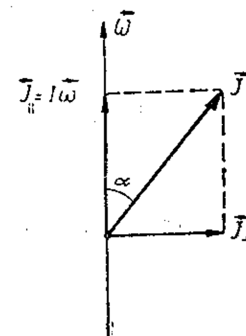


Fig. 6.3

6.6. VARIAȚIA MOMENTULUI CINETIC DE ROTAȚIE ȘI VARIAȚIA ENERGIEI CINETICE DE ROTAȚIE

6.6.1. DERIVATA MOMENTULUI CINETIC DE ROTAȚIE

Aceasta se poate calcula *direct* din sumele respective (reamintim că $\dot{\vec{r}}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{v}_{rot\,k} = \vec{v}_k$):

$$\dot{\vec{J}}_{rot} = \sum(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k)^{\cdot} = \sum\vec{r}_k \times m_k\dot{\vec{v}}_k = \sum\vec{r}_k \times m_k(\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^{\cdot} =$$
$$= \sum\vec{r}_k \times m_k(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k) + \sum\vec{r}_k \times m_k(\vec{\omega} \times \vec{v}_k).$$

Primul termen este identic ca structură cu forma pătratică a lui $\vec{J}_{rot}$ (6.21) numai că în loc de $\vec{\omega}$, avem aici $\vec{\varepsilon}$, deci este egal cu $\hat{I}\vec{\varepsilon}$. Al doilea termen, dezvoltat, dă $-\sum\vec{v}_k(\vec{r}_k m_k\vec{\omega})$, $(\vec{r}_k\vec{v}_k = 0)$, la fel ca și $\vec{\omega} \times \vec{J}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{J} = \vec{\omega} \times (\sum\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k) = -\sum m_k\vec{v}_k(\vec{\omega}\vec{r}_k), \; (\vec{\omega}\vec{v}_k = 0).$$

Prin urmare,

$$\dot{\vec{J}}_{rot} = \hat{I}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{J} = \hat{I}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\hat{I}\vec{\omega}). \tag{6.36}$$

6.6.2. DERIVATA ENERGIEI CINETICE DE ROTAȚIE

Se obține efectuînd derivarea

$$\dot{E}_{rot} = \left(\sum\frac{1}{2}m_k v_k^2\right)^{\cdot} = \sum m_k\vec{v}_k\dot{\vec{v}}_k = \sum m_k\vec{v}_k(\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^{\cdot} =$$
$$= \sum m_k\vec{v}_k(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k), \quad (\text{termenul } \vec{v}_k(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_k) = 0)$$

şi permutînd ciclic produsul mixt:

$$\dot{E}_{rot} = \sum \vec{\varepsilon}(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \vec{\varepsilon}\vec{J} = (\vec{\varepsilon}, \hat{I}\vec{\omega}) = (\vec{\omega}, \hat{I}\vec{\varepsilon}),$$

($\hat{I}$ este matrice simetrică), dar din (6.36) : $\hat{I}\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{J}} - \vec{\omega} \times \vec{J}$, atunci

$$\dot{E}_{rot} = (\vec{\omega}, \dot{\vec{J}} - \vec{\omega} \times \vec{J}) = (\vec{\omega}, \dot{\vec{J}}) - (\vec{\omega}, \vec{\omega} \times \vec{J}) = \vec{\omega}\dot{\vec{J}},$$

unde ultimul produs scalar (mixt) este nul. Prin urmare,

$$\dot{E}_{rot} = (\vec{\varepsilon}, \hat{I}\vec{\omega}) = (\vec{\omega}, \hat{I}\vec{\varepsilon}) = \vec{J}\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{J}}\vec{\omega}. \quad (6.37)$$

Într-un SR *inerțial* avem teoremele (6.24) și (6.15), deci

$$\dot{\vec{J}}_{rot} = \hat{I}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{J} = \vec{M}, \qquad \dot{E}_{rot} = \vec{J}\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{J}}\vec{\omega} = \vec{M}\vec{\omega}. \quad (6.38)$$

6.7. TEOREMELE DE DESCOMPUNERE

Dacă descompunem mișcarea rigidului în mișcarea de translație a *centrului de masă* și mișcarea de rotație în jurul unei axe instantanee trecînd prin *centrul de masă*, atunci se aplică teoremele de descompunere din capitolul 4:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} + \hat{I}_0\vec{\omega}, \quad (6.39)$$

unde $\vec{L} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P}$ și $\vec{S} = \hat{I}_0\vec{\omega}$, (6.40)

$$E_c = E_{tr} + E_{rot} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2, \quad (6.41)$$

unde $E_{tr} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$ și $E_{rot} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \hat{I}_0\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\vec{S}\vec{\omega}$; (6.42)

unde I_0 este momentul de inerție față de axa de rotație *centrală* (care trece prin CM), iar $\hat{I}_0$ este matricea momentelor de inerție față de SCM. Dacă descompunerea s-ar face față de un punct (pol) diferit de CM, atunci în descompunere ar apare termeni suplimentari „micști", de „interferență" între mișcarea de translație și mișcarea de rotație.

Teoremele generale de la capitolul 4 devin:

Teorema momentului cinetic:

$$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{L}} + \dot{\vec{S}} = \vec{M} = \sum_s \vec{r}_s \times \vec{F}_s = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} + \sum_s \vec{r}_s' \times \vec{F}_s, \quad (6.43)$$

$$\dot{\vec{L}} = (\vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm})^{\cdot} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}, \quad (6.44)$$

$$\dot{\vec{S}} = (\hat{I}_0\vec{\omega})^{\cdot} = \hat{I}_0\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{S} = \vec{M}_0 = \sum \vec{r}_s' \times \vec{F}_s. \quad (6.45)$$

Teorema energiei cinetice:

$$\dot{E}_c = \dot{E}_{tr} + \dot{E}_{rot} = P = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k = \vec{F}\vec{v}_{cm} + \sum \vec{F}_k \vec{v}_k', \quad (6.46)$$

$$\dot{E}_{tr} = \left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2\right)^{\cdot} = P_{tr} = \vec{F}\vec{v}_{cm}, \quad (6.47)$$

$$\dot{E}_{rot} = \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2\right)^{\cdot} = \vec{S}\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{S}}\vec{\omega} = P_{rot} = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k' = \vec{M}_0\vec{\omega}. \quad (6.48)$$

Forța rezultantă:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm}. \quad (6.49)$$

6.8. AXELE PRINCIPALE DE INERȚIE

Se poate demonstra că rotind convenabil SC din figura 6.1, există o poziție pentru care *momentele centrifugale se anulează*. Axele obținute se numesc axe *principale* de inerție $Ox_{1,2,3}$, iar momentele de inerție respective se numesc momente *principale* de inerție $I_{1,2,3}$ (J. A. Segner 1755, L. Euler 1758). Față de aceste axe (notate cu indicii 1, 2, 3) avem deci

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6.50)$$

$$I = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3, \quad (6.51)$$

unde $\alpha_{1,2,3}$ sînt unghiurile pe care le face axa de rotație $\vec{\omega}$ cu axele *principale* de inerție (fig. 6.4). Trecerea la noul SC înseamnă aducerea formei pătratice (6.17) (deci și a matricei $\hat{I}$) la forma diagonală (6.50), adică la o sumă de pătrate.

Condiția ca o axă, de exemplu, axa Oz, să fie *principală* este ca cele *două* momente centrifugale referitoare la acea axă să fie nule:

$$I_{zx} = -\int zx\, dm = 0, \quad I_{zy} = -\int zy\, dm = 0.$$

Condiția ca cele trei axe $Oxyz$ ale unui SC ortogonal să fie principale este ca cele trei momente centrifugale de inerție să fie nule.

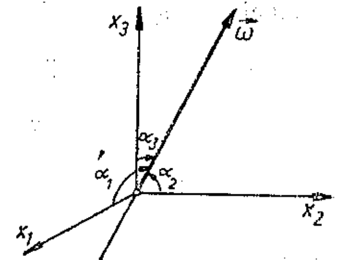


Fig. 6.4

Față de axele principale energia cinetică de rotație apare atunci ca o sumă a energiilor cinetice de rotație, în mod independent, în jurul fiecărei axe principale, cu viteza unghiulară corespunzătoare (componenta lui $\vec{\omega}$ pe axa respectivă).

Momentul cinetic devine

$$\vec{J}_{rot} = \vec{i}I_1\omega_1 + \vec{j}I_2\omega_2 + \vec{k}I_3\omega_3 = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + I_3\vec{\omega}_3, \qquad (6.52)$$

ca şi cum rigidul s-ar roti în mod independent în jurul fiecărei axe cu viteza unghiulară respectivă.

Dacă rigidul se roteşte în jurul unei axe *principale* de inerţie, de exemplu, Ox_3, atunci momentul cinetic este *paralel* cu axa de rotaţie:

$$\vec{J} = I_3\vec{\omega},\ \text{dacă}\ \omega = \omega_3,\ \omega_1 = \omega_2 = 0. \qquad (6.53)$$

În general însă, vectorul $\vec{J}$ *nu* este paralel cu axa de rotaţie $\vec{\omega}$.

Un corp pentru care $I_1 = I_2 = I_3$ se numeşte *titirez* (sfîrlează) *sferic* (ă), atunci momentul de inerţie (6.51) este acelaşi pentru orice axă care trece prin centrul respectiv (deoarece $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$) şi (6.52) devine:

$$\vec{J} = I\vec{\omega},\ \vec{J} \parallel \vec{\omega},\ (I_1 = I_2 = I_3), \qquad (6.53')$$

adică $\vec{J}$ este paralel cu $\vec{\omega}$ pentru orice axă de rotaţie care trece prin centrul respectiv.

Cînd axa trece prin centrul de masă al corpului, ea se numeşte axă *centrală* de inerţie, iar momentul faţă de această axă se numeşte moment *central* de inerţie.

O axă principală centrală este principală pentru toate punctele sale.

Pentru corpuri *omogene regulate momentele principale centrale* de inerţie se pot calcula uşor şi se găsesc în tabele.

Dacă un corp omogen posedă o axă de simetrie, ea va fi axă principală centrală de inerţie (la sfera omogenă orice diametru este principal).

În adevăr, dacă de exemplu, axa Oz este axă de *simetrie*, atunci pentru orice element de masă $dm\ (x, y, z)$ se va găsi un element identic aşezat simetric $dm(-x, -y, z)$ (fig. 6.5) şi în integralele $I_{zx} = -\int zx\,dm$, $I_{zy} = -\int zy\,dm$ termenii corespunzători se vor anula reciproc.

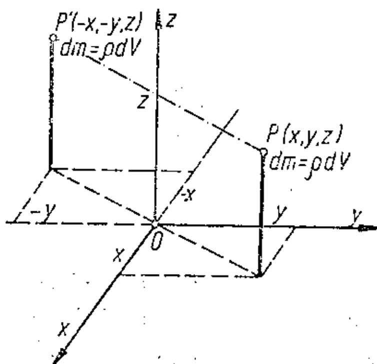


Fig. 6.5

6.9. TEOREMA LUI STEINER

Pentru o axă *centrală oarecare*, momentul de inerţie se calculează cu formula (6.51), cunoscînd momentele principale centrale, iar pentru o axă necentrală („exterioară") oarecare se aplică **teorema lui Steiner** (cunoscută de Huygens şi demonstrată de Euler în 1749): *momentul de inerţie I faţă de o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie I_0 faţă de o axă* **paralelă** *centrală plus produsul dintre masa corpului şi pătratul distanţei dintre axe:*

$$I = I_0 + mR_0^2. \qquad (6.54)$$

Teorema lui Steiner este analogă teoremelor de descompunere (6.39—42) faţă de CM:

Momentul de inerţie I faţă de o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie orbital sau extern al corpului presupus redus la un punct material în CM (mR_0^2) *plus momentul de inerţie propriu sau intern I_0 faţă de o axă* **centrală, paralelă** *cu axa dată.*

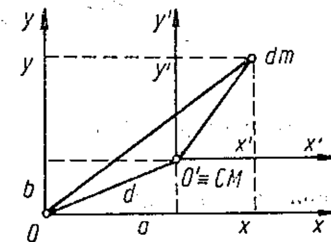


Fig. 6.6

Pentru demonstraţie alegem Oz de-a lungul axei date, iar $O'z'$ de-a lungul axei paralele centrale (fig. 6.6, axele Oz şi $O'z'$ sînt perpendiculare pe planul figurii). Atunci

$$I = \int (x^2+y^2)dm = \int (a+x')^2 dm + \int (b+y')^2 dm =$$
$$= \int (x'^2 + y'^2)dm + \int (a^2 + b^2)dm +$$
$$+ 2a\int x'\,dm + 2b\int y'\,dm = I_0 + mR_0^2,$$

ultimele două integrale fiind nule deoarece O' coincide cu CM, adică

$$x'_{cm} = \frac{1}{m}\int x'\,dm = 0, \qquad y'_{cm} = \frac{1}{m}\int y'\,dm = 0.$$

Mai general, *matricea momentelor de inerţie* $\hat{I}$ *faţă de un* SC *oarecare este egală cu matricea momentelor de inerţie orbitale* $\hat{I}_{cm}$ *ale corpului presupus redus la un punct material în* CM, *plus matricea momentelor de inerţie proprii* $\hat{I}_0$ *faţă de un* SC **central paralel** *cu cel dat:*

$$\hat{I} = \hat{I}_{cm} + \hat{I}_0. \qquad (6.55)$$

6.10. MOMENTELE DE INERŢIE. EXEMPLE DE CALCUL

a) Tijă subţire omogenă de masă m şi lungime l (fig. 6.7):

$$I_1 = I_2 = \int_{-l/2}^{l/2} z^2\,dm,\ \ dm = \frac{m}{l}dz,$$

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} z^2\,dz = \frac{1}{12}ml^2,\ \ I_3 = 0. \qquad (6.56)$$

Față de o axă la capătul barei (perpendiculară pe bară) găsim, aplicînd teorema lui Steiner:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2, \ (I'_3 = 0). \tag{6.57}$$

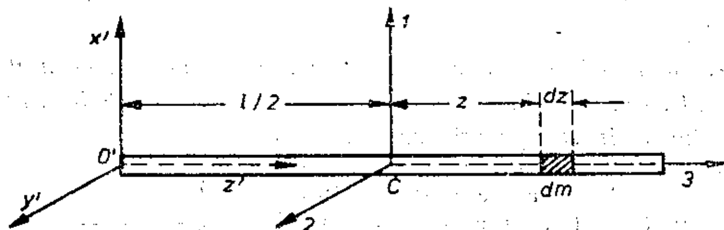


Fig. 6.7

b) Pentru o *figură plană* ($Ox_3 \perp$ pe planul figurii):

$$I_3 = I_1 + I_2, \tag{6.58}$$

deoarece (fig. 6.8):

$$I_1 = \int y^2\,dm, \ I_2 = \int x^2\,dm, \ I_3 = \int (x^2 + y^2)dm = I_1 + I_2.$$

De exemplu, pentru o *coroană circulară* omogenă de masă m și razele $R_{1,2}$ (fig. 6.9) avem $I_3 = I_1 + I_2$ și din motive de simetrie $I_1 = I_2$, deci

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3, \ I_3 = \int (x^2 + y^2)dm, \tag{6.59}$$

$$dm = \sigma\,dS = \sigma \cdot 2\pi r dr, \ (\sigma \text{ — densitatea superficială}),$$

$$I_3 = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \sigma 2\pi r dr = \frac{\pi\sigma}{2}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2). \tag{6.60}$$

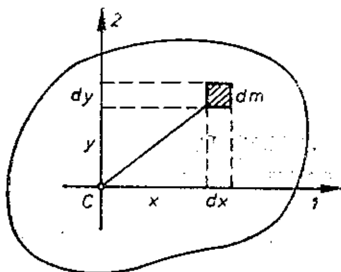


Fig. 6.8

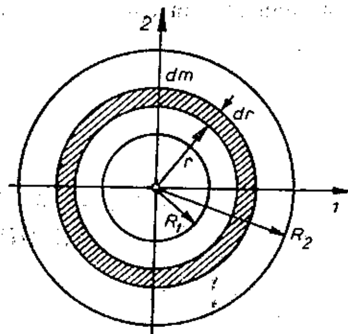


Fig. 6.9

În particular, pentru un *inel subțire* omogen de masă m și rază R rezultă ($R_1 = R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3, \ I_3 = mR^2 \tag{6.61}$$

și pentru un *disc subțire* omogen de rază $R = R_2$, $R_1 = 0$:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3, \ I_3 = \frac{1}{2}mR^2. \tag{6.62}$$

c) *Pătură sferică* omogenă de masă m și raze $R_{1,2}$:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{1}{3}\int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + y^2 + x^2)dm =$$

$$= \frac{2}{3}\int r^2 \rho\, dV = \frac{2}{3}\rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot 4\pi r^2\, dr = \frac{8\pi}{3}\rho\frac{1}{5}(R_2^5 - R_1^5) =$$

$$= \frac{2}{5}\, m(R_2^5 - R_1^5) : (R_2^3 - R_1^3). \tag{6.63}$$

În particular, pentru o *pătură sferică subțire* omogenă de masă m și rază $R = R_1 = R_2$:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3}mR^2 \tag{6.64}$$

și pentru o *sferă plină* omogenă ($R_2 = R$, $R_1 = 0$):

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}mR^2. \tag{6.65}$$

d) *Pătură cilindrică* omogenă de masă m, raze $R_{1,2}$ și înălțime h (fig. 6.10):

$$I_3 = \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho 2\pi r\, dr \cdot h =$$

$$= 2\pi\rho h \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2), \tag{6.66}$$

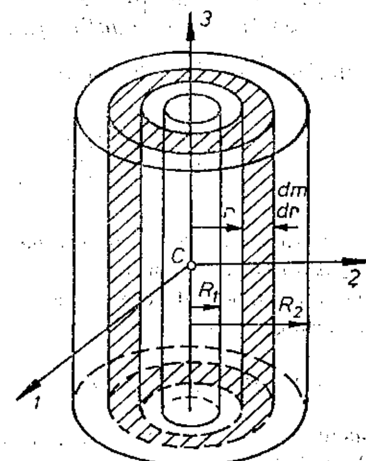


Fig. 6.10

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}\int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2)dm = \frac{1}{2}\int r^2\,dm + \int z^2\,dm =$$

$$= \frac{1}{2}I_3 + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{m}{h}\,dz = \frac{1}{4}m\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{1}{3}h^2\right). \tag{6.67}$$

În particular, pentru o *pătură cilindrică subțire* de masă m, rază $R = R_1 = R_2$ și înălțime h rezultă:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2, \ I_3 = mR^2 \tag{6.68}$$

și pentru un *cilindru plin* omogen de masă m, rază R și înălțime h ($R_1 = 0$, $R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}m\left(R^2 + \frac{1}{3}h^2\right), \quad I_3 = \frac{1}{2}mR^2. \tag{6.69}$$

6.11. ROTAȚIA ÎN JURUL AXEI FIXE. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC

6.11.1. ROTAȚIA ÎN JURUL AXEI FIXE

În cazul unei axe fixe Oz avem $\omega_z = \omega$, $(\omega_x = \omega_y = 0)$,

$$J_z = I_{zz}\omega_z \text{ sau } J_{\|} = I\omega. \tag{6.70}$$

Ecuația momentului cinetic dă:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M} \rightarrow \dot{J}_z = M_z \text{ sau } \frac{d(I\omega)}{dt} = M_z = M_{\|}, \tag{6.71}$$

unde $M_z = M_{\|}$ este momentul forțelor *în raport cu axa de rotație*, adică proiecția pe Oz (axa de rotație) a momentului rezultant $\vec{M}$ (calculat în raport cu un punct de pe axă).

Aceasta este *ecuația fundamentală pentru mișcarea de rotație*, analogă ecuației $\frac{d(mv)}{dt} = F_t$ pentru mișcarea de translație. Dacă $I = \text{const}$, avem

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon = M_{\|}, \ (I = \text{const}). \tag{6.72}$$

Exemple. a) Pe un cilindru omogen de masă M și rază R este înfășurat un fir subțire. La capătul liber al firului este atîrnat un corp de masă m_1 de care este legat în continuare printr-un alt fir un alt corp de masă m_2. Se neglijează frecările. Să se afle accelerația corpurilor și tensiunile din fire (fig. 6.11).

Rezolvare. $T_1R = I\varepsilon$, $m_1g + T_2 - T_1 = m_1a$, $m_2g - T_2 = m_2a$, $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Condiția de nealunecare a firului pe cilindru: $a = \varepsilon R$.
Rezolvînd sistemul, găsim:

$$a = \frac{g}{1 + M/2(m_1 + m_2)}, \quad T_1 = \frac{Mg}{2 + M/(m_1 + m_2)}, \quad T_2 = \frac{m_2g}{1 + 2(m_1 + m_2)/M}.$$

b) Un cilindru omogen de rază R este adus în stare de rotație cu turația n_r în jurul axei sale și așezat în unghiul diedru drept ca în figura 6.12. Cunoscînd coeficienții de frecare la lunecare $\mu_{1,2}$, să se afle cîte ture efectuează cilindrul pînă la oprire.

Rezolvare. $N_1 - mg + F_{f2} = 0$, $N_2 - F_{f1} = 0$, $I\varepsilon = -(F_{f1} + F_{f2})R$ cu condițiile $F_{f1} = \mu_1N_1$, $F_{f2} = \mu_2N_2$. Rezolvînd sistemul, găsim:

$$\varepsilon = -\frac{\mu_1(1 + \mu_2)}{1 + \mu_1\mu_2}\frac{mgR}{I}, \quad I = \frac{1}{2}mR^2$$

și atunci

$$N = -\frac{2\pi n_0^2}{2\varepsilon} = \frac{1 + \mu_1\mu_2}{\mu_1(1 + \mu_2)}\frac{\pi n_0^2 R}{2g}.$$

c) Momentul forțelor de frecare dintr-un lagăr este proporțional cu viteza unghiulară: $M_f \sim \omega$. Știind că sub acțiunea unui moment motor (activ) $M = 1{,}00$ kN·m, rotorul cu momentul de inerție $I = 20{,}0$ kg·m², atinge turația limită (maximă) $n_0 = 1\,200$ rot/min, să se afle după cît timp rotorul atinge 90 % din această turație și cîte rotații face în acest timp.

Rezolvare. $I\varepsilon = M - M_f$ sau $I\frac{d\omega}{dt} = M - k\omega$. Cînd se atinge turația limită, $\dot{\omega} = 0$ sau $M = M_f = k\omega_0$, deci $k = M/\omega_0$.

$$\frac{Id\omega}{M - k\omega} = dt \text{ sau } \frac{I}{M}\frac{d\omega}{1 - \omega/\omega_0} = dt \text{ și } \frac{I}{M}\frac{\omega d\omega}{1 - \omega/\omega_0} = \omega dt = d\theta$$

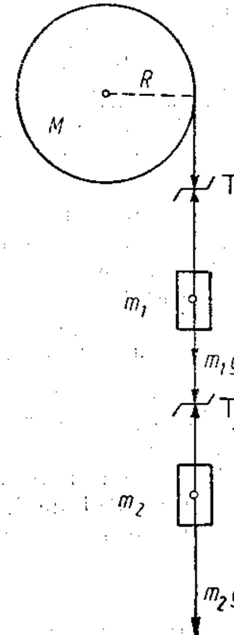


Fig. 6.11

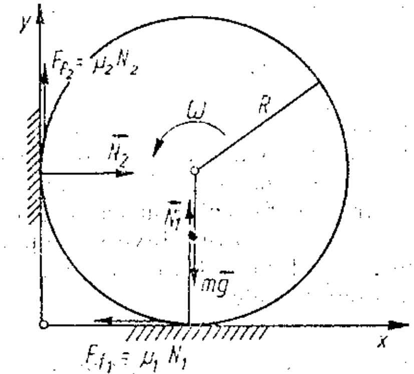


Fig. 6.12

de unde integrînd cele două ecuații (cu ω inițial nul):

$$t = \frac{I}{M}\omega_0 \ln\frac{1}{1 - \omega/\omega_0} = 11{,}5 \text{ s}; \ \theta = 2\pi N = \frac{I}{M}\omega_0\left(\omega_0 \ln\frac{1}{1 - \omega/\omega_0} - \omega\right) =$$

$$= \omega_0\left(t - \frac{I}{M}\omega\right), \quad N = n_0\left(t - \frac{I}{M}\omega\right) = 150 \text{ rot.}$$

6.11.2. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC

Dacă $M_{\|} = 0$, din (6.71) rezultă conservarea momentului cinetic în raport cu axa de rotație:

$$M_{\|} = 0 \rightarrow J_{\|} = I\omega = \text{const}. \tag{6.73}$$

Conservarea momentului cinetic $I\omega$ se demonstrează ușor cu ajutorul scaunului (taburetului) lui Jukovski — o platformă orizontală rotativă pe rulmenți. Un om avînd greutăți în mîini se rotește împreună cu platforma. Depărtînd lateral mîinile, crește I și deci scade ω. Invers, apropiind mîinile de corp, scade I și crește ω (fig. 6.13).

Într-o altă experiență, un om, inițial în repaus, ține în mînă o roată (Prandtl) cu axă verticală (fig. 6.13). Punînd-o în mișcare de rotație, platforma cu omul se va roti în sens invers, pentru că momentul cinetic total este nul.

Dacă omul, inițial în repaus, primește o roată în rotație cu axă verticală și apoi întoarce axa ei cu 180°, el se va roti în sens opus, și întorcînd roata înapoi cu 180°, el se va opri și poate restitui roata.

Ca ordin de mărime, momentul de inerție al unui om față de axa sa longitudinală (verticală) în pozițiile : drept — 1,2 kg·m², ghemuit — 2,3 kg·m², pe un picior cu brațele depărtate și celălalt picior depărtat — 8 kg·m². În jurul axei centrale sagitale (stînd drept) — 17 kg·m².

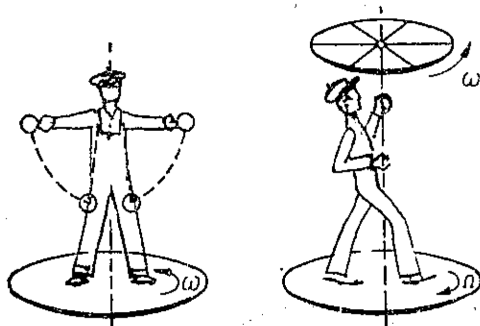


Fig. 6.13

Legile mișcării de rotație explică funcționarea volanților. *Volantul* este o roată (disc) cu *moment de inerție mare*, care posedă deci un moment cinetic mare și o energie cinetică de rotație *mare*. Volantul servește pentru uniformizarea mișcării de rotație a mașinilor. În adevăr, la mașinile cu explozie forțele dezvoltate nu sînt constante și nu efectuează uniform lucru mecanic, de aceea mișcarea pistonului n-ar da o mișcare de rotație uniformă. Fixînd pe arborele motor un volant, acesta joacă rolul unui „rezervor" de energie cinetică care compensează variațiile lucrului mecanic produs de motor, astfel încît variațiile turației vor fi mici (fiind invers proporționale cu momentul de inerție al volantului). Rolul volantului poate fi îndeplinit și de rotoarele turbinelor sau ale motoarelor electrice.

6.11.3. ANALOGIA DINTRE TRANSLAȚIE ȘI ROTAȚIE

Între mișcarea de translație și mișcarea de rotație există o *analogie* ilustrată de tabelul de mai jos.

Mișcarea de translație	Mișcarea de rotație
s, [m]	θ, [rad]
$v = \dot{s}$ [m/s]	$\omega = \dot{\theta}$, [rad/s]
$\vec{v}$, [m/s]	$\vec{\omega}$, [rad/s]
$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$, [m/s²]	$\varepsilon_{\parallel} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$, [rad/s²]
$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, [m/s²]	$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ [rad/s²]
m, [kg]	I, [kg·m²]
$\vec{F}$, [N]	$\vec{M}$, [N·m]
F_t, [N]	$M_{\parallel}$, [N·m]
$\vec{p} = m\vec{v}$, [kg·m/s]	$\vec{J} = \hat{I}\vec{\omega}$, [J·s]
$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dot{\vec{J}} = \frac{d\vec{J}}{dt}$
$F_t = ma_t$	$M_{\parallel} = I\varepsilon_{\parallel}$
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$, [J]	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$, [J]
$dW = \vec{F}\vec{v}dt$, [J]	$dW = \vec{M}\vec{\omega}dt$, [J]
$P = \vec{F}\vec{v}$, [W]	$P = \vec{M}\vec{\omega}$, [W]

6.12. PENDULUL DE TORSIUNE

Un fir (sau bară) elastic, vertical, răsucit cu ajutorul unui cuplu de forțe și lăsat liber va efectua oscilații de *torsiune* (fig. 6.14). Pentru unghiuri mici de răsucire momentul forțelor elastice M este proporțional cu unghiul de răsucire θ (în radiani) :

$$M = -C\theta, \quad (6.74)$$

unde C este *constanta de torsiune* a firului, avînd dimensiunile :

$$[C] = [M] = L^2MT^{-2} = \quad (6.75)$$

$= N \cdot m$ sau $N \cdot m/rad$ în SI.

Relația (6.74) este analogul *unghiular* al cazului liniar $F = -kx$. Semnul minus din (6.74) arată că momentul elastic M dezvoltat de firul răsucit este opus creșterii unghiului de răsucire θ. Ecuația (6.72) dă

$$I\varepsilon = M = -C\theta, \; I\ddot{\theta} + C\theta = 0, \quad (6.76).$$

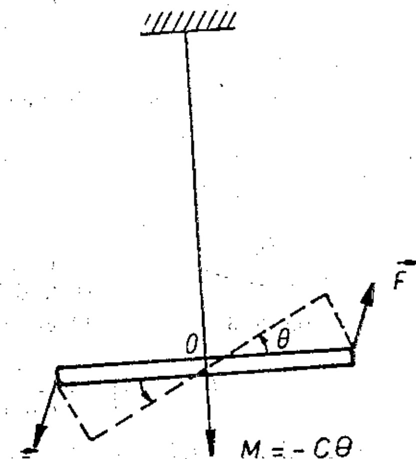


Fig. 6.14

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0 \text{ sau } \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

adică cunoscuta ecuație a oscilatorului armonic, de unde perioada oscilațiilor de torsiune (a nu se confunda $\dot{\theta}$ = viteza unghiulară cu ω de mai sus = frecvența unghiulară a oscilațiilor) :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}, \left(\text{analog lui } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right). \quad (6.77)$$

Pendulul de torsiune este folosit, de exemplu, la determinarea experimentală a momentelor de inerție, a constantei gravitaționale universale etc.

6.13. PENDULUL FIZIC

Un corp rigid care poate oscila în jurul unei axe orizontale fixe de suspensie, sub acțiunea greutății sale, constituie un **pendul fizic** (fig. 6.15). Se neglijează forțele de frecare. Ecuația (6.72) dă (R_0 — distanța centrului de greutate G pînă la axa de suspensie O) :

$$I\ddot{\theta} = M = -mgR_0 \sin\theta, \quad (6.78)$$

(momentul M este de semn opus unghiului θ). Pentru unghiuri *mici* ($\theta \ll 1$ rad sau $\theta < 6°$), $\sin\theta \approx \theta$ în rad și (6.78) devine :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR_0}{I}\theta = 0, \; \omega^2 = \frac{mgR_0}{I}, \quad (6.79)$$

de unde perioada oscilațiilor mici :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}, \; l_r = \frac{I}{mR_0}. \quad (6.80)$$

unde I este momentul de inerție *față de axa de suspensie* O, iar l_r — *lungimea redusă* a pendulului fizic, adică lungimea unui pendul simplu (matematic) sincron cu cel fizic.

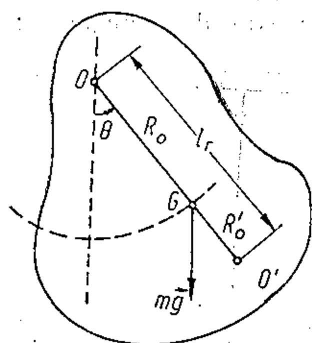


Fig. 6.15

Legea izocronismului micilor oscilații : *Oscilațiile mici sînt izocrone, adică perioada lor nu depinde de amplitudinea unghiulară.*

Conform teoremei lui Steiner,

$$I = I_0 + mR_0^2, \tag{6.81}$$

de aceea

$$l_r = \frac{I_0 + mR_0^2}{mR_0} = R_0 + \frac{I_0}{mR_0} = R_0 + R'_0 > R_0,$$

$$R_0 R'_0 = I_0/m. \tag{6.82}$$

Dacă schimbăm axa de suspensie din O în O' (fig. 6.15), perioada *nu* se schimbă (O' se numește *centrul de oscilație*) :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mR_0'^2}{gmR'_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_0 + R'_0}{g}} = T. \tag{6.83}$$

Pendulul *reversibil* (M. R. Prony 1792, H. Kater 1817) este un pendul pentru care stabilim experimental poziția axelor O, O' astfel ca perioadele să fie *egale*. Atunci distanța dintre aceste axe va fi lungimea redusă l_r și cu (6.80) putem calcula pe $g = 4\pi^2 l_r/T^2$, ($l_r = OO'$).

6.14. AXELE LIBERE (SPONTANE) ȘI AXELE PERMANENTE DE ROTAȚIE

6.14.1. AXELE LIBERE

Teoria arată și experiența confirmă că atunci cînd un corp este obligat să se rotească în jurul unei *axe fixe* **diferite** *de o axă principală centrală de inerție*, corpul reacționează asupra axei și lagărelor cu forțe de reacțiune care depind în general de pătratul vitezei unghiulare ω și de accelerația unghiulară $\varepsilon = \dot{\omega}$, putînd deforma sau chiar rupe axul la turații mari. Astfel, un disc fixat excentric sau înclinat îndoaie axul și apasă asupra lagărelor (fig. 6.16).

În adevăr, forța rezultantă, conform lui (5.26) (polul pe axa de rotație) :

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm} = m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{cm} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{cm}) \tag{6.84}$$

va fi *nulă* dacă axa este *centrală*, adică CM se află pe axa de rotație, căci atunci $\vec{r}_{cm} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{\varepsilon}$; altfel forța va depinde de pătratul vitezei unghiulare ω și de neuniformitatea rotației (de $\varepsilon = \dot{\omega}$).

Alegînd ca mai înainte axa Oz de-a lungul axei de rotație $\vec{\omega}$, expresia (6.84) devine analitic :

$$\vec{F} = m\vec{i}(-\varepsilon y_{cm} - \omega^2 x_{cm}) + m\vec{j}(\varepsilon x_{cm} - \omega^2 y_{cm}) \tag{6.85}$$

și dacă CM este pe axa de rotație ($x_{cm} = y_{cm} = 0$), forța se anulează.

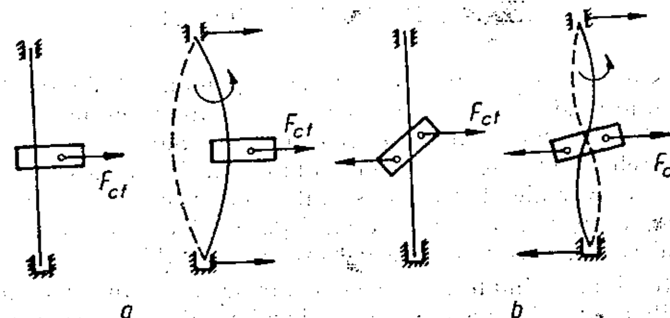


Fig. 6.16

La fel, momentul rezultant, conform lui (6.38) :

$$\vec{M} = \dot{\vec{J}} = \hat{I}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{J} = \hat{I}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\hat{I}\vec{\omega}) \tag{6.86}$$

va fi *paralel* cu axa de rotație dacă aceasta este *principală*, căci atunci $\vec{\omega} \times \vec{J} = 0$ ($\vec{J} \parallel \vec{\omega}$) și $\hat{I}\vec{\varepsilon}$ se reduce la $I\vec{\varepsilon}$, paralel cu $\vec{\omega}$; altfel, axa va fi supusă la un moment $M_\perp$ care îndoaie axa.

Analitic, ecuația (6.86) devine :

$$\vec{M} = \vec{i}(I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2) + \vec{j}(I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2) + \vec{k}I_{zz}\varepsilon \tag{6.87}$$

și dacă Oz este axă *principală* (atunci $I_{xz} = I_{yz} = 0$), atunci componentele transversale ale momentului se anulează ($M_x = M_y = 0$) și $\vec{M}$ va fi $I\vec{\varepsilon}$, paralel cu axa de rotație (cu $\vec{\omega}$).

De aceea, pentru ca axa de rotație să *nu* fie supusă la eforturi, trebuie ca forțele de inerție centrifuge cu care corpul reacționează asupra axei să se echilibreze reciproc (să dea rezultantă nulă și moment rezultant paralel cu axa), ceea ce reprezintă tocmai condiția ca *axa de rotație să fie axă principală centrală de inerție* (fapt remarcat încă de Euler). Pentru aceasta piesele în rotație (volanții, roțile, turbinele) trebuie bine centrate și echilibrate.

Dacă în experiențele din figura 6.16 axa de rotație a corpului este o axă *principală centrală* de inerție, atunci lagărul superior poate fi *îndepărtat* și corpul se va roti *liber* în jurul axei sale verticale (ca un titirez). În acest caz, forțele din lagărul inferior dau $M_\perp = 0$ și deci $\vec{J} = I\vec{\omega}$ păstrează direcție neschimbată.

Dacă unui rigid nesupus la nici o forță exterioară i se imprimă o rotație în jurul unei axe **principale centrale** *de inerție, el va continua la nesfîrșit să se rotească uniform în jurul acestei axe* (analogul *unghiular* al legii inerției privind translația CM, § 4.5).

În adevăr, dacă de exemplu, $\omega = \omega_3$, $\omega_{1,2} = 0$, atunci

$$\vec{S} = I_3\vec{\omega}, \quad \frac{d}{dt}(I_3\vec{\omega}) = \vec{M} \equiv 0 \rightarrow I_3\vec{\omega} = \text{const}, \tag{6.88}$$

de unde

$$\vec{\omega} = \text{const}.$$

Axele principale centrale de inerție se mai numesc de aceea și axe *libere* (*spontane*) de rotație.

6.14.2. STABILITATEA ROTAȚIEI

Rotația este *stabilă* în jurul axei libere de moment de inerție *extremal* (maxim sau minim) și este instabilă în jurul axei libere de moment de inerție intermediar. Astfel, dacă rotim printr-un fir o bară ușoară suspendată (fig. 6.17), forțele centrifuge F_{cf} vor stabili pînă la urmă o rotație stabilă în jurul axei transversale. Tot astfel se întîmplă cu un disc (sau inel) de carton sau cu un lănțișor ușor (cu capetele legate între ele). Dacă încercăm să perturbăm mișcarea, corpul revine la rotația sa stabilă.

Experiențe și mai simple se fac cu o farfurioară sau cu o monedă. Ele se pot roti liber și stabil pe o masă în jurul unui diametru vertical. Dacă însă farfurioara este ovală sau moneda teșită la forma ovală, putem să le imprimăm o rotație liberă *stabilă* în jurul diametrului *lung*, dar nu în jurul celui scurt, deși momentul de inerție în jurul diametrului scurt este mai mare decît în jurul celui lung (dar mai mic decît în jurul axei perpendiculare

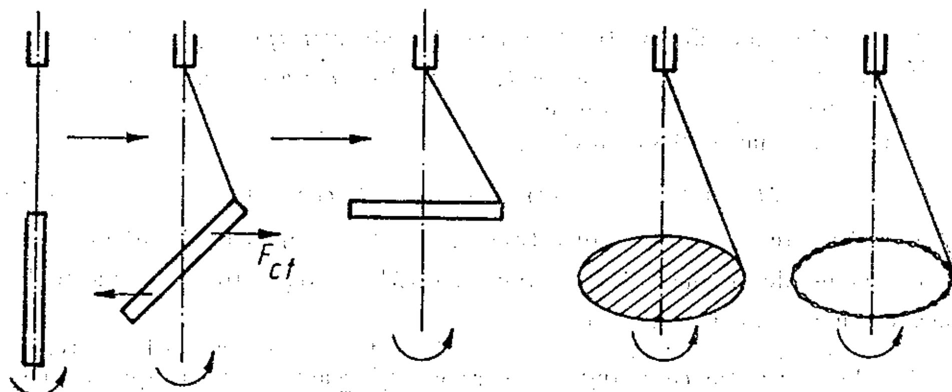


Fig. 6.17

pe planul discului). Farfurioara ovală sau moneda ovală în cel mai bun caz *se va ridica* și se va roti în jurul diametrului lung.

În sfîrșit, putem arunca în aer o cutie paralelipipedică (de țigări, de chibrituri etc.) imprimîndu-i o rotație liberă stabilă în jurul unei axe perpendiculare pe fața de arie maximă sau minimă, nu însă de arie intermediară (momentul de inerție respectiv va fi maxim, minim sau intermediar).

6.14.3. LEGEA INERȚIEI

Dacă un rigid este izolat ($\vec{F} = 0$, $\vec{M} = 0$), atunci momentul său cinetic $\vec{J}$ și energia sa cinetică E_c se conservă. Cum în acest caz CM se mișcă rectiliniu uniform ($\vec{F} = 0$), rezultă că momentul cinetic orbital se conservă: $\vec{L} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} =$ const și energia cinetică de translație se conservă: $E_{tr} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 =$ const. Atunci și *momentul cinetic propriu* $\vec{S}$ *se conservă*, deoarece $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, și *energia cinetică proprie de rotație se conservă* $E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{S}\vec{\omega}$, deoarece $E_c = E_{tr} + E_{rot}$.

Din conservarea lui $\vec{S}$ *nu rezultă în general conservarea vectorului* $\vec{\omega}$, *deoarece* $\vec{S}$ *nu este în general paralel cu* $\vec{\omega}$.

Conservarea rotației uniforme are totdeauna loc pentru titirezul sferic (6.53'):

$$I_1 = I_2 = I_3 = I, \quad \vec{S} = I\vec{\omega} = \text{const} \rightarrow \vec{\omega} = \text{const}, \qquad (6.89)$$

precum și în cazurile (6.53, 6.88). În general însă, vectorul $\vec{\omega}$ se schimbă față de $\vec{S} =$ const, dar astfel încît

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{S}\vec{\omega} = \text{const}, \quad (\vec{S} = \text{const}). \qquad (6.90)$$

Dacă un rigid este **izolat**, *atunci centrul său de masă* (CM) *este în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă, și în același timp rigidul se poate roti la nesfîrșit uniform în jurul unei axe* **principale centrale** *de inerție*.

6.14.4. AXE PERMANENTE

În sfîrșit, se poate arăta că, dacă unui corp mobil în jurul unui punct fix și supus la forțe externe trecînd prin acel punct, i se imprimă o mișcare de rotație în jurul unei axe *principale* de inerție trecînd prin acel punct fix, el va continua să se rotească uniform în jurul acestei axe. De aceea axele principale de inerție se mai numesc și axe *permanente* de rotație. După cum am văzut, axele permanente de rotație trecînd prin *centrul de masă* se numesc axe *libere* de rotație.

6.15. GIROSCOPUL

Giroscopul este un corp care efectuează o mișcare de rotație (cu turație mare) în jurul unei axe de simetrie libere (principale centrale), de moment de inerție maxim. El tinde să păstreze *neschimbată* în spațiu direcția axei sale de rotație și este cu atît mai stabil cu cît viteza unghiulară este mai mare și cu cît momentul de inerție față de axa de rotație este mai mare. Giroscopul a fost inventat de Foucault în 1852 (cu scopul de a dovedi rotația Pămîntului).

6.15.1. TEORIA ELEMENTARĂ

Giroscopul în suspensie *cardanică* își păstrează axa neschimbată în spațiu oricum am roti suportul (fig. 6.18). În adevăr, nefiind supus la nici un *moment* al forțelor exterioare, datorită suspensiei cardanice, momentul cinetic al giroscopului se conservă:

$$\vec{S} = I\vec{\omega} = \text{const} \rightarrow \vec{\omega} = \text{const}. \qquad (6.91)$$

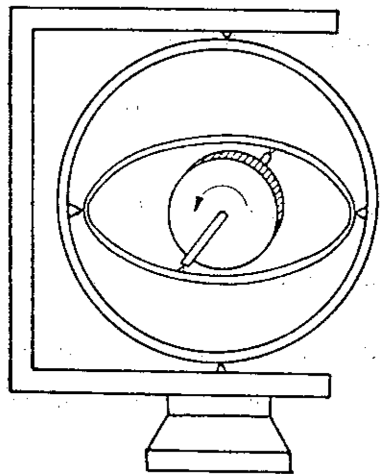


Fig. 6.18

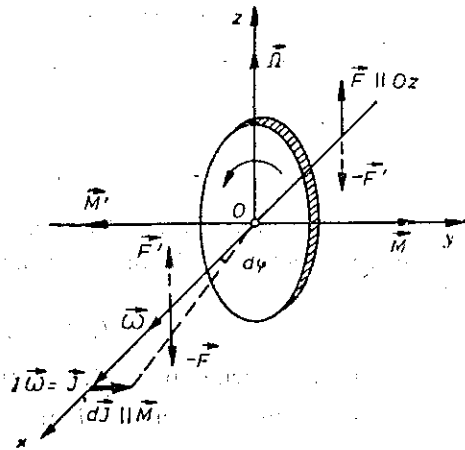


Fig. 6.19

Dacă aplicăm giroscopului un moment $\vec{M}$ perpendicular pe axa sa de rotație, el se va roti în jurul celei de-a *treia* axe (fig. 6.19).

În adevăr (considerăm CM în repaus în originea SL, atunci SCM coincide cu SL):

$$\dot{\vec{J}} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}, \quad d\vec{J} = \vec{M}\,dt \tag{6.92}$$

și considerînd că $\vec{J}$ rămîne practic egal cu $I\vec{\omega}$ rezultă că axa de rotație $\vec{\omega}$ (inițial paralelă cu Ox) se va roti în jurul lui Oz, momentul $\vec{M}$ fiind după Oy. De aici rezultă regula:

Giroscopul tinde să așeze axa sa de rotație $\vec{\omega}$ paralel cu axa rotației forțate (impuse) $\vec{M}$.

Notînd cu Ω viteza unghiulară în jurul axei Oz, avem (considerind că $\Omega \ll \omega$, astfel ca $\vec{J} \approx I\vec{\omega}$):

$$d\varphi = \Omega\,dt,\ dJ = J\,d\varphi = \Omega J\,dt,\ d\vec{J} = \vec{\Omega} \times \vec{J}\,dt,$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{J} = \vec{M}, \text{ de unde } \vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{J} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} I. \tag{6.93}$$

Invers, dacă axa giroscopului $\vec{\omega}$ (inițial paralelă cu Ox) este rotită în jurul axei Oz cu viteza $\vec{\Omega}$, ea va exercita asupra lagărelor forțe de reacțiune (forțe giroscopice) cu momentul

$$\vec{M}' = -\vec{M} = -\vec{\Omega} \times \vec{\omega} I, \tag{6.94}$$

antiparalel axei Oy (efect giroscopic).

6.15.2. TITIREZUL

Fie un giroscop cu punct de sprijin fix, în cîmpul gravitațional terestru (titirezul sau sfîrleaza) (fig. 6.20). Momentul cuplului format de forța de greutate $m\vec{g}$ și reacțiunea normală $\vec{N} = -m\vec{g}$, anume $M = mgl \sin\alpha$, este tot timpul perpendicular pe planul $(\vec{\omega}, \vec{g})$, de aceea și capătul vectorului $\vec{J} = I\vec{\omega}$ se deplasează în același sens cu $\vec{M}$, deci axa de rotație $\vec{\omega}$ descrie un con cu axă verticală:

$$\vec{M}dt = d\vec{J} = \vec{\Omega} \times \vec{J}dt,\ |\dot{\vec{J}}| = \Omega J \sin\alpha = M = mgl \sin\alpha,$$

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega}. \tag{6.95}$$

Titirezul efectuează o mișcare de *precesie* $\vec{\Omega}$ în jurul verticalei, în același sens cu rotația proprie $\vec{\omega}$.

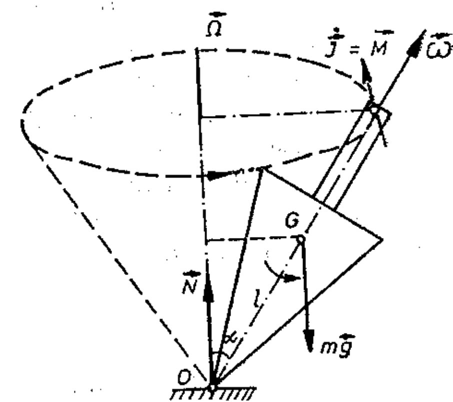


Fig. 6.20

6.15.3. APLICAȚII

Giroscopul are mai multe aplicații tehnice. Proprietatea giroscopului de a-și păstra fixă direcția axei sale este folosită pentru stabilizarea direcției de zbor a torpilelor sau rachetelor: un giroscop în suspensie cardanică acționează asupra dispozitivului de direcție al torpilei (sau rachetei).

De asemenea, datorită unor ghinturi în țeava tunului, proiectilele capătă o rotație proprie rapidă care le stabilizează direcția axei. În navigația maritimă și aeriană se folosește busola giroscopică (compas giroscopic) în care axa giroscopului arată mereu direcția Sud-Nord.

Giroscoape mari sînt folosite pentru atenuarea balansului vapoarelor datorită valurilor (stabilizatoare giroscopice).

Efectele giroscopice pot fi și dăunătoare. Astfel, la virajul vapoarelor sau avioanelor, axa longitudinală a turbinelor va exercita presiuni asupra lagărelor, producînd oscilații sau chiar distrugerea rulmenților.

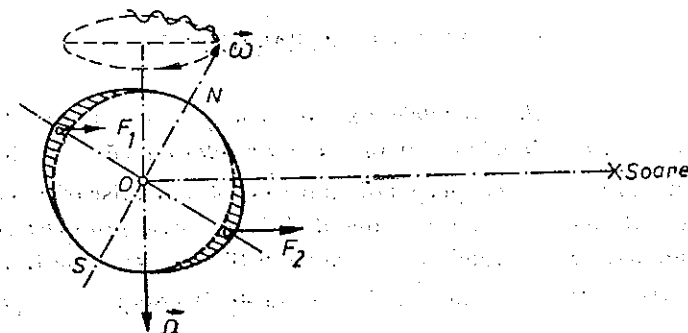


Fig. 6.21

Pămîntul, datorită rotației sale diurne, reprezintă un imens giroscop, cu axa inclinată cu 23°30′ față de planul eclipticei. Datorită nesfericității Pămîntului rezultanta forțelor de atracție solară nu trece prin centrul Pămîntului, ci dă un moment ca în figura 6.21, care face ca axa Pămîntului să execute o mișcare de precesie, descriind un con, cu o perioadă de ≈ 25 800 ani. Datorită influenței Lunii, polul ceresc descrie de-a lungul circumferinței de precesie o curbă asemănătoare sinusoidei. Această mișcare se numește *nutație*, și are o perioadă de ≈ 19 ani.

6.16. MIȘCAREA PLAN-PARALELĂ

6.16.1. MIȘCAREA ÎN SPAȚIU

În cazul mișcării rigidului în spațiu aplicăm ecuațiile (6.49) pentru mișcarea de translație în SL:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm} = m\vec{a}_0 + m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{cm} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{cm}) \qquad (6.96)$$

și ecuația (6.45) $\vec{M}_0 = \hat{I}_0\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{S}$ în SCM. Această din urmă ecuație se poate scrie *pe componente față de un SC propriu cu originea în* CM, dar cu vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ *calculați în* SL *sau* SCM:

$$\vec{M}' = \sum_s \vec{r}'_s \times \vec{F}_s = \hat{I}'\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\hat{I}'\vec{\omega}), \qquad (6.97)$$

unde $\hat{I}'$ este matricea momentelor de inerție ale rigidului față de un SC *propriu cu originea în* CM al rigidului ($\hat{I}' = \text{const}$), $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ sînt viteza și accelerația unghiulare ale rigidului *față de* SL *sau* SCM și $\vec{M}'$ este momentul rezultant al forțelor *față de* CM.

6.16.2. AXA DE ROTAȚIE FIXĂ

În cazul mișcării *plan-paralele* axa de rotație este perpendiculară pe planul mișcării. Să considerăm mai întîi *axa de rotație fixă* și să alegem ca de obicei axa Oz paralelă cu $\vec{\omega}$ (perpendiculară pe planul mișcării). Este comod să scriem ecuațiile vectoriale pe componente față de un SC *propriu cu originea* O' *în* CM. Alegem axa $O'z'$ paralelă cu Oz, iar axa $O'x'$ astfel ca să treacă prin O (fig. 6.22), $OO' = R_{cm}$. Atunci $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ nu au decît componente pe $Oz(O'z')$:

$$\omega_z = \omega'_z = \omega, \ \varepsilon_z = \varepsilon'_z = \varepsilon. \qquad (6.98)$$

Ecuația mișcării de translație a CM (6.96) devine:

$$\vec{F} = m\vec{\varepsilon} \times \vec{R}_{cm} - m\omega^2\vec{R}_{cm} = mR_{cm}(-\omega^2, \ \varepsilon, \ 0), \qquad (6.99)$$

$$F = mR_{cm}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \ \operatorname{tg}\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Ecuația mișcării de rotație (6.97) devine:

$$\vec{M}' = \hat{I}'\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\hat{I}'\vec{\omega}) = (I'_{xz}\varepsilon - I'_{yz}\omega^2, \ I'_{yz}\varepsilon + I'_{xz}\omega^2, \ I'_{zz}\varepsilon). \qquad (6.100)$$

Fig. 6.22

Acest moment conține o parte *paralelă* cu $\vec{F}$:

$$\vec{M}'_{\parallel} = I'_{yz}(-\omega^2, \ \varepsilon, \ 0), \ M'_{\parallel} = I'_{yz}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \qquad (6.101)$$

restul fiind perpendicular pe $\vec{F}$:

$$\vec{M}'_{\perp} = (I'_{xz}\varepsilon, \ I'_{xz}\omega^2, \ I'_{zz}\varepsilon).$$

Prin urmare, sistemul de forțe aplicate rigidului se reduce la rezultanta $\vec{F}$ (6.99) aplicată în CM plus cuplul $\vec{M}'$ (6.100) sau la rezultanta $\vec{F}$ de-a lungul axei centrale, aplicată de exemplu în *centrul de oscilație* definit prin coordonatele:

$$\vec{r}'_{co} = (I'_{zz}/mR_{cm}, \ 0, \ -I'_{xz}/mR_{cm}) \qquad (6.102)$$

plus cuplul longitudinal (6.101).

Dacă $I'_{yz} = 0$, forțele se reduc numai la rezultanta $\vec{F}$ (6.99), aplicată în centrul de oscilație (6.102) situat la distanța

$$R_{co} = R_{cm} + I'_{zz}/mR_{cm} = I_{zz}/mR_{cm} \qquad (6.103)$$

față de axa Oz („lungimea redusă").

Pe direcţia axei de rotaţie ecuaţia (6.100) dă

$$M'_{zz} = I'_{zz}\varepsilon, \tag{6.104}$$

adică, *momentul rezultant în raport cu axa centrală de rotaţie, M'_{zz}, este egal cu momentul de inerţie în raport cu această axă, I'_{zz}, înmulţit cu acceleraţia unghiulară ε.*

6.16.3. MIŞCAREA PLAN-PARALELĂ

Mişcarea se descompune în mişcarea de translaţie : $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ şi mişcarea de rotaţie în jurul unei axe centrale (care trece prin CM), perpendiculare pe planul mişcării : (6.100), care dă în particular ecuaţia (6.104) (alegem planul mişcării trecînd prin CM). La aceste ecuaţii se adaugă de obicei condiţii suplimentare, fie restricţii pentru mişcare, de exemplu condiţia de nealunecare la rostogoliri, fie condiţii pentru forţele de frecare la lunecare.

Observăm că ecuaţia rotaţiei (6.104) se poate scrie şi faţă de acel punct P_0 din planul mişcării a cărui acceleraţie a_0 este zero (centrul acceleraţiilor W) sau este îndreptată spre CM (trece prin CM) :

$$M_{zz} = I_{zz}\varepsilon. \tag{6.104'}$$

În adevăr, trebuie îndeplinită condiţia $(\vec{R}_0 = \overrightarrow{P_0\text{-}CM})$:

$$M'_{zz} = M_{zz} - (\vec{R}_0 \times \vec{F})_{zz} = I'_{zz}\varepsilon = (I_{zz} - mR_0^2)\varepsilon \Rightarrow$$

$$\vec{R}_0 \times \vec{F} = mR_0^2\vec{\varepsilon} \text{ dar } \vec{F} = m\vec{a}_{cm} = m(\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{R}_0 - \omega^2\vec{R}_0),$$

de unde rezultă condiţia

$$\vec{R}_0 \times \vec{a}_0 = 0.$$

Exprimîndu-l pe $\vec{a}_0$ (prin $\vec{a}_{cm}$), rezultă că punctul P_0 trebuie să fie pe normala din CM la $\vec{a}_{cm}$ (sau la $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$) :

$$-\vec{R}_0 = \lambda\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_{cm},\ R_0 = \lambda\varepsilon a_{cm} \text{ astfel ca } a_{cm} = \varepsilon R.$$

de unde

$$-\vec{R}_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_{cm},\ R_0 = a_{cm}/\varepsilon. \tag{6.105}$$

Cazul practic important este acela cînd axa $O'z'$ este centrala *principală*, atunci ecuaţia (6.100) se reduce doar la (6.104) ($I'_{xz} = I'_{yz} = 0$) sau respectiv la (6.104'). Aşa se întîmplă, de exemplu, în cazul rostogolirii corpurilor rotunde omogene în jurul unei axe principale centrale.

Deoarece *centrul vitezelor C* are totdeauna acceleraţia *perpendiculară* pe tangenta comună a centroidelor, atunci dacă CM se află pe normala în C la această tangentă comună, ca în cazul obişnuit al rostogolirii corpurilor omogene rotunde (cilindri sau sfere), putem scrie ecuaţia (6.104') *faţă de centrul vitezelor C* (acesta coincide cu punctul de contact în cazul nealunecării $a_{cm} = \varepsilon R_0$ etc.).

Exemple. a) Peste un scripete de masă m, moment de inerţie I şi rază R sînt înfăşurate simetric în sensuri opuse două fire, unul fiind fir de suspensie, iar celălalt avînd atîrnat la capăt un corp de masă M ca în figura 6.23. Să se afle acceleraţia CM a scripetelui şi tensiunile din fire.

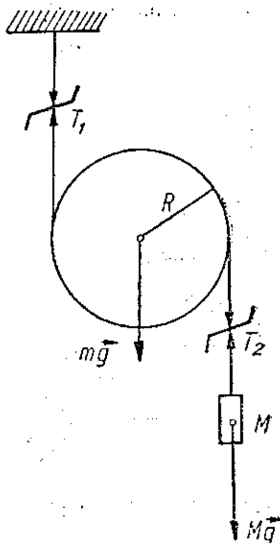


Fig. 6.23

Rezolvare. $Mg - T_2 = Ma'$, $a' = 2R\varepsilon$, $mg + T_2 - T_1 = ma$, $a = \varepsilon R$, $I'\varepsilon = mgR + T_2 \cdot 2R$, unde $I' = I + mR^2$.
Corpul M nu poate avea o acceleraţie $a' > g$. Calculăm T_2:

$$T_2 = \frac{Mg}{C}(I/mR^2 - 1), \text{ unde } C = 1 + \frac{4M}{m} + \frac{I}{mR^2}$$

Dacă $T_2 > 0$, adică $I > mR^2 (a' < g)$, obţinem :

$$a = \frac{g}{C}\left(1 + \frac{2M}{m}\right),\ T_1 = \frac{Mg}{C}\left[1 + \frac{I}{R^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right].$$

Dacă $I < mR^2$, trebuie pus $T_2 = 0$ ($a' = g$) şi atunci ecuaţiile sînt

$$mg - T_1 = ma,\ I'\varepsilon = mgR,\ a = \varepsilon R,$$

de unde

$$\varepsilon = g\frac{mR^2}{I'},\ T_1 = mg\frac{I}{I'},\ (T_2 = 0).$$

b) Pe o masă orizontală se află un mosor de aţa de masă m, raze r, R, moment de inerţie I şi coeficient de frecare la lunecare μ. De capătul firului se trage cu o forţă F care face unghiul α cu orizontala (fig. 6.24). Să se calculeze acceleraţia CM.

Rezolvare. Mosorul se poate rostogoli într-un sens sau altul după cum suportul forţei $\vec{F}$ trece de o parte sau de alta a punctului de contact C.

$$F\cos\alpha - F_f = ma;\ F\sin\alpha + N - mg = 0;\ F_f R - Fr = I\varepsilon.$$

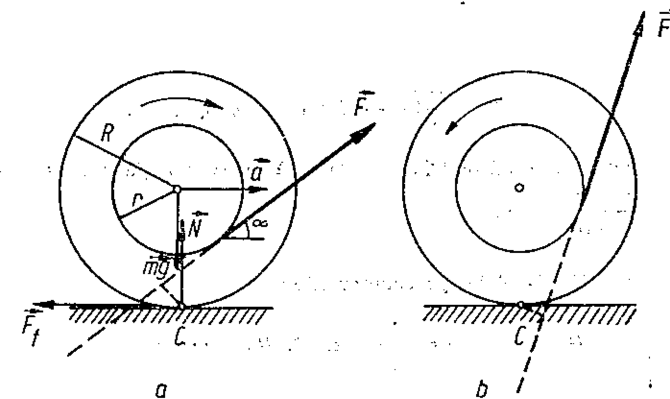


Fig. 6.24

În cazul rostogolirii fără lunecare, $a = \varepsilon R$, şi obţinem :

$$a = \frac{F}{m}\frac{\cos\alpha - r/R}{1 + I/mR^2},\ F_f = F\frac{I\cos\alpha + mrR}{I + mR^2}.$$

Condiţia de nealunecare este evident $F_f < \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$. Mosorul se va rostogoli spre noi $(a > 0)$ dacă $\cos\alpha > r/R$.

În cazul lunecării $F_f = \mu N$ (şi $a \neq \varepsilon R$) şi ecuaţiile sint:

$$F\cos\alpha - \mu N = ma,\ F\sin\alpha + N - mg = 0,\ \mu NR - Fr = I\varepsilon,$$

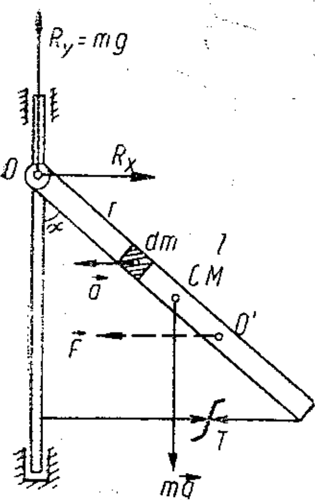


Fig. 6.25

de unde

$$a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g,$$

$$\varepsilon = \frac{\mu R}{I}(mg - F\sin\alpha) - Fr/I.$$

Pentru $\mu \to 0$ mosorul lunecă spre noi $(a > 0)$, rotindu-se în sens invers (înapoi) $(\varepsilon < 0)$.

c) O tijă omogenă de lungime l şi masă m este prinsă la un capăt printr-o articulaţie de o axă verticală, într-o poziţie înclinată de unghi α, celălalt capăt al tijei fiind legat printr-un fir orizontal de axă (fig. 6.25). Să se calculeze forţa de reacţiune $\vec{R}$ din articulaţie şi tensiunea din fir, cînd tija se roteşte cu viteza unghiulară ω = const în jurul axei verticale.

Rezolvare. Putem aplica formulele stabilite pentru rotaţia în jurul axei fixe, dar uneori se aplică direct ecuaţiile:

$$\vec{F} = \int \vec{a}\, dm = m\vec{a}_{cm} \text{ şi } \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a}\, dm. \quad (6.106)$$

Şi aplicăm ultima ecuaţie faţă de articulaţie (articulaţia ideală nu dă moment):

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha + Tl\cos\alpha = \int_0^l r\cos\alpha \cdot r\sin\alpha\cdot\omega^2\cdot\frac{m}{l}\, dr = \frac{1}{3}\sin\alpha\cos\alpha\, ml^2\omega^2,$$

de unde

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{2}{3}\omega^2 l\sin\alpha - g\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Deoarece trebuie ca $T > 0$ (altfel tija se apropie de axă), poziţia din figură este posibilă pentru $\omega^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{l}\frac{1}{\cos\alpha} = \omega_0^2$.

Ecuaţia $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ dă (fig. 6.25) pe componente:

$$R_x - T = -m\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha\cdot\omega^2,\ R_y - mg = 0,$$

de unde

$$R_x = -\frac{m}{2}\left(\frac{l}{3}\omega^2\sin\alpha + g\operatorname{tg}\alpha\right),\ R_y = mg.$$

Pentru $\omega = \omega_0$, R_x devine: $R_x = -\frac{3}{4}mg\operatorname{tg}\alpha$

Studiaţi cazul $\omega < \omega_0$.

Observaţie. Rezultanta forţelor aplicate $\vec{F} = \int \vec{a}\, dm = m\vec{a}_{cm}$ şi momentul forţelor aplicate $\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a}\, dm$ pot fi reduse numai la rezultanta $\vec{F}$ dar aplicată în *centrul de oscilaţie* O' situat la distanţa $R_{co} = \frac{2}{3}l$ de la articulaţie. În adevăr,

$$F\cdot R_{co}\cos\alpha = M \text{ sau } m\frac{l}{2}\sin\alpha\cdot\omega^2\cdot R_{co}\cos\alpha = \frac{1}{3}\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot ml^2\omega^2,$$

de unde $R_{co} = \frac{2}{3}l$.

d) Un punct O al unei plăci plane, care se mişcă în planul său aşezat orizontal, este la un moment dat fixat. Înainte de fixare viteza punctului O era v_0 şi viteza unghiulară ω_0. Să se afle viteza unghiulară a plăcii imediat după fixarea punctului O, cunoscînd raza de giraţie R_g a plăcii faţă de CM, distanţa R_0 dintre O şi CM, şi unghiul α dintre $\vec{v}_0$ şi $O-$ CM (fig. 6.26).

Rezolvare. Aplicăm ecuaţiile (4.40):

$$\vec{H} = m\Delta\vec{v}_{cm} \text{ şi } \vec{K} = \Delta\vec{S} \text{ (faţă de CM)}, \quad (6.107)$$

unde în cazul nostru al *ciocnirilor*:

$$\vec{K} = \sum_s \vec{r}_s \times \vec{H}_s. \quad (6.108)$$

Înainte de fixare luăm pe O drept pol:

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{R}_0$$

şi după fixare:

$$\vec{v}'_{cm} = \vec{\omega} \times \vec{R}_0.$$

Cele două ecuaţii dau:

$$\vec{H} = m\Delta\vec{v}_{cm} = m(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times \vec{R}_0 - m\vec{v}_0,$$

$$\vec{K} = -\vec{R}_0 \times \vec{H} = I_0\Delta\vec{\omega} = I_0(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0).$$

Faţă de SC ales, avem pe componente:

$$H_x = -mv_0\cos\alpha,\ H_y = mR_0(\omega - \omega_0) - mv_0\sin\alpha,$$

$$K_z = -H_y R_0 = I_0(\omega - \omega_0),\ (I_0 = mR_g^2),$$

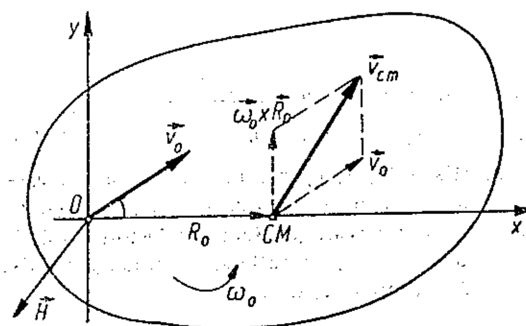


Fig. 6.26

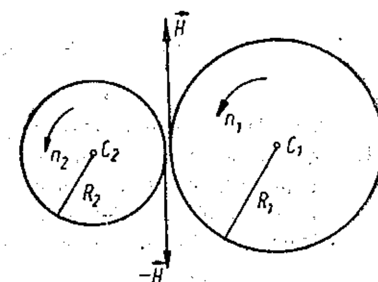


Fig. 6.27

de unde rezultă:

$$\omega = \omega_0 + \frac{v_0 R_0 \sin\alpha}{R_0^2 + R_g^2}, \quad \left(H_g = -mv_0 \sin\alpha \frac{1}{1 + R_0^2/R_g^2}\right).$$

c) Două roţi dinţate de raze $R_{1,2}$, momente de inerţie $I_{1,2}$ şi turaţii $n_{1,2}$ avînd axele de rotaţie paralele, sînt la un moment dat cuplate, ca în figura 6.27. Să se calculeze turaţiile după cuplare şi cantitatea de căldură degajată.

Rezolvare. Aplicăm ecuaţia $\vec{K} = \Delta\vec{J}$, în cazul nostru $\vec{K} = I\Delta\vec{\omega}$, separat pentru fiecare roată (considerăm n, ω pozitive în sens trigonometric):

$$-HR_1 = I_1(\omega_1' - \omega_1), \; -HR_2 = I_2(\omega_2' - \omega_2)$$

şi condiţia de cuplare:

$$\omega_1' R_1 = -\omega_2' R_2,$$

de unde rezultă:

$$n_1' = -R_2 A, \; n_2' = R_1 A, \text{ unde } A = \frac{n_2 I_2 R_1 - n_1 I_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2},$$

$$Q = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1\omega_1'^2 - \frac{1}{2} I_2\omega_2'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2.$$

PROBLEME

6.1. Să se demonstreze formulele de mai jos pentru momentele de inerţie faţă de un SC central cu axa $Oz = Ox_3$ şi cu axele Oxy rotite cu unghiul α faţă de axele principale centrale Ox_1x_2 (fig. 6.28):

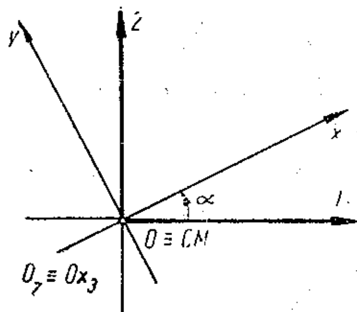


Fig. 6.28

$$I_{xx} = I_1\cos^2\alpha + I_2\sin^2\alpha, \; I_{yy} = I_1\sin^2\alpha + I_2\cos^2\alpha, \; I_{zz} = I_3;$$
$$I_{xy} = (I_2 - I_1)\sin\alpha\cos\alpha, \; I_{yz} = 0, \; I_{xz} = 0. \qquad (6.109)$$

6.2. O placă subţire omogenă dreptunghiulară se roteşte în jurul unei laturi ale sale aşezate vertical. Fiecare element de suprafaţă al plăcii întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu aria elementului şi cu pătratul vitezei sale. Cunoscînd turaţia iniţială $n_0 = 10{,}0$ rot/s a plăcii şi timpul $\tau = 1{,}00$ s după care această turaţie se reduce la jumătate, să se calculeze numărul de ture efectuate de placă în timpul acesta τ.

R. $N = \frac{n_0 t}{\omega_0/\omega - 1} \ln\frac{\omega_0}{\omega} = n_0\tau \ln 2 = 6{,}9$ rot.

6.3. O tijă subţire omogenă de lungime l şi masă m se roteşte într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix (fig. 6.29). Să se afle rezultanta $\vec{F}$ a forţelor aplicate tijei, în momentul cînd viteza unghiulară a tijei este ω şi acceleraţia unghiulară ε.

R. $F_t = \frac{1}{2} m\varepsilon l$, $F_n = \frac{1}{2} m\omega^2 l$, $F = \frac{1}{2} ml\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$,

aplicată în centrul de oscilaţie situat la distanţa $\frac{2}{3} l$ de capăt.

6.4. O tijă subţire omogenă se poate roti liber într-un plan vertical în jurul unei articulaţii care împarte tija în segmente de lungime a, b. Tija este rotită uniform cu viteza unghiulară ω

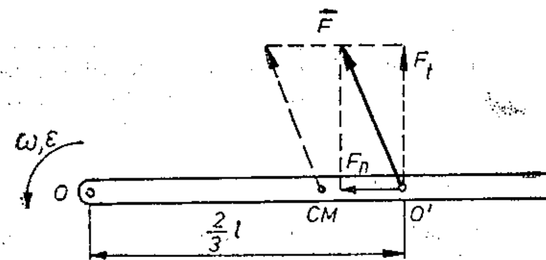


Fig. 6.29

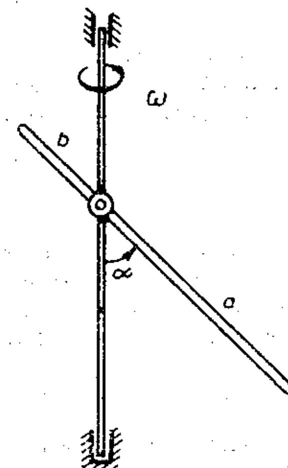


Fig. 6.30

în jurul unei axe verticale trecînd prin articulaţie (fig. 6.30). Să se calculeze unghiul cu care deviază tija de la poziţia verticală.

R. $\cos\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2}\frac{a-b}{a^2 - ab + b^2}$.

6.5. Un disc subţire omogen de rază R şi masă m se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale centrale care face unghiul α cu normala la disc. Să se calculeze momentul cuplului rezultant al forţelor exercitate de axă asupra discului.

R. $\vec{M} = \frac{m}{4}\omega R^2 \cos\alpha \cdot \vec{n} \times \vec{\omega}$, $\vec{n}$ — versorul normalei la disc.

6.6. Un om de masă m se află pe un disc orizontal care se poate roti liber în jurul axei sale verticale fixe, avînd momentul de inerţie I. Iniţial sistemul este în repaus, apoi omul începe să meargă pe disc cu viteza constantă u faţă de disc pe o circumferinţă de rază R. Să se afle: a) turaţia n a discului; b) deplasarea unghiulară θ_0 a omului faţă de pămînt la o tură completă pe disc; c) forţa $\vec{F}$ exercitată de om asupra discului.

R. a) $n = -\frac{u}{2\pi R}\frac{1}{1 + I/mR^2}$; b) $\theta_0 = \frac{2\pi}{1 + mR^2/I}$; c) componenta verticală $F_v = -mg$, iar cea radială $F_r = \frac{mu^2}{R}\frac{1}{(1 + mR^2/I)^2}$.

6.7. O tijă subțire omogenă de lungime l se poate roti liber în spațiu în jurul unui capăt al său fixat într-o articulație. Se aduce tija în poziție orizontală și i se imprimă o viteză unghiulară inițială ω_0 în planul orizontal. Să se afle unghiul *minim* pe care-l face tija cu verticala în timpul mișcării.

R. $\cos\alpha_m = \sqrt{b^2+1} - b$, unde $b = l\omega_0^2/6g$.

6.8. O tijă subțire omogenă și uniformă, sub formă de arc de cerc (de rază R), este suspendată la mijloc pe un cui bătut în perete. Să se afle perioada micilor oscilații în planul vertical paralel cu peretele.

R. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$ (independent de lungimea arcului de cerc).

6.9. O bară subțire omogenă și uniformă de lungime l este suspendată la distanța x de centrul barei pe un cui bătut în perete. Care este perioada minimă a micilor oscilații în planul vertical paralel cu peretele?

R. $T_m = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sqrt{3}}}$ pentru $x_m = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ (raza de inerție).

6.10. Să se arate că perioada oscilațiilor unui pendul fizic nu se schimbă dacă în centrul de oscilație se adaugă o masă punctiformă arbitrară. Să se afle la ce distanță R_m de CM al pendulului de masă m și moment de inerție central I_0, trebuie să treacă axa de rotație pentru ca perioada oscilațiilor mici să fie minimă.

R. $R_m = \sqrt{I_0/m}$ – raza de girație față de axa centrală paralelă cu axa de rotație.

6.11. Peste un scripete de masă m, moment de inerție I și rază R este înfășurat un fir. Un capăt al firului este prins de tavan, iar celălalt are atîrnat un corp de masă M. Să se afle accelerația cu care coboară scripetele și tensiunile din fire.

R. $a = \dfrac{gmR^2}{I+mR^2}$, $T_1 = Mg + \dfrac{mgI}{I+mR^2}$, $T_2 = Mg$.

6.12. Peste un scripete ideal, care se rotește în jurul axei sale orizontale fixe, este trecut un fir. De un capăt al firului este legat un corp de masă m, iar celălalt capăt este înfășurat pe un alt scripete de aceeași masă m, de rază R și de moment de inerție I. **a)** Să se calculeze accelerația acestui din urmă scripete și tensiunea din fir. **b)** Cît devine această accelerație dacă corpul m de la celălalt capăt al firului se dezleagă și în locul său se trage în jos cu o forță egală cu greutatea corpului dezlegat (mg)?

R. a) $a = \dfrac{g}{1+2I/mR^2}$, $T = \dfrac{mg}{1+mR^2/2I}$; **b)** $a = 0$.

6.13. Un cilindru omogen rigid de masă $m = 2{,}0$ kg și rază $R = 4{,}9$ cm, căruia i se imprimă o turație $n = 15{,}0$ rot/s, este așezat pe o masă orizontală rigidă cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}10$ și lăsat liber. Să se afle: **a)** după cît timp mișcarea cilindrului trece în rostogolire fără lunecare; **b)** cîte rotații efectuează cilindrul în acest timp; **c)** cîtă căldură se degajă în acest timp; **d)** ce mișcare și ce turație are cilindrul după acest timp.

R. a) $\tau = \dfrac{2\pi nR}{3\mu g} = 1{,}57$ s; **b)** $N = \dfrac{4\pi n^2 R}{9\mu g} = 15{,}7$ rot; **c)** $Q = \dfrac{2}{3}\pi^2 n^2 mR^2 = 7{,}1$ J;

d) rostogolire uniformă cu turația $n' = n/3 = 5$ rot/s.

6.14. Pe un disc omogen de masă m și rază R este înfășurat un fir întins orizontal ca în figura 6.31 (firul nu freacă de masă), apoi trecut peste un scripete ideal și legat la capăt de un corp de masă M. Să se calculeze: forța de frecare, tensiunea din fir, accelerația discului (se dă coeficientul de frecare la lunecare μ).

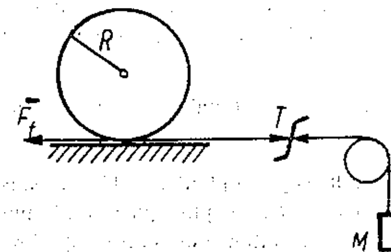


Fig. 6.31

R. a) În cazul nealunecării, totul va fi în repaus sau rostogolire uniformă și M în repaus.

$a = 0$, $T = Mg$, $F_f = T = Mg$, $\mu > M/m$.

b) În cazul lunecării:

$$T = Mg\frac{1+3\mu}{1+3M/m},\quad a = g\frac{M-\mu m}{m+3M},\quad \varepsilon = \frac{2g}{R}\,\frac{M-\mu m}{m+3M},\quad a' = 3g\frac{M-\mu m}{m+3M}.$$

6.15. Pe un plan înclinat de unghi α se rostogolește liber în jos un corp rotund omogen (cilindru sau sferă) de masă m, rază R și moment de inerție central I. Să se afle: **a)** forța de frecare și coeficientul de frecare la lunecare minim necesar pentru ca corpul să nu lunece, **b)** accelerația CM; **c)** accelerația unghiulară; **d)** distanța axei instantanee de rotație pînă la CM.

R. În cazul nealunecării: $F_f = \dfrac{mg\sin\alpha}{1+mR^2/I}$, condiția de nealunecare: $\mathrm{tg}\,\alpha < \mu(1+mR^2/I)$.

$a = \dfrac{g\sin\alpha}{1+I/mR^2}$, $\varepsilon = a/R$, $R_c = R$.

În cazul lunecării: $F_f = \mu mg\cos\alpha$, $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, $\varepsilon = \mu mg\,R\cos\alpha/I$, $R_c = a/\varepsilon = I(\mathrm{tg}\,\alpha - \mu)/\mu mR$.

6.16. Un corp rotund omogen (sferă, cilindru) de masă m, rază R și moment de inerție I este așezat, cu coeficientul de frecare la lunecare μ, pe o scîndură de masă m', așezată la rîndul ei pe o masă fixă cu coeficientul de frecare la lunecare μ'. Scîndura este trasă orizontal cu o forță F astfel încît lunecă pe masă. Să se calculeze: **a)** forța de frecare dintre corp și scîndură și condiția de nealunecare a corpului pe scîndură; **b)** accelerațiile scîndurii și corpului; **c)** accelerația unghiulară a corpului; **d)** poziția axei instantanee de rotație a corpului.

R. a) În cazul nealunecării, $F_f = \dfrac{F-\mu'(m+m')g}{1+(1+mR^2/I)m'/m}$, $F_f < \mu mg$;

b) $a = F_f/m$ $\quad a' = \dfrac{1}{m}F_f(1+mR^2/I)$; **c)** $\varepsilon = F_fR/I$; **d)** $R_c = I/mR$.

În cazul lunecării: **a)** $F_f = \mu mg$; **b)** $a = \mu g$, $a' = \dfrac{1}{m'}[F-\mu'(m+m')g - \mu mg]$;

c) $\varepsilon = \mu mgR/I$; **d)** $R_c = I/mR$.

6.17. Pe o masă orizontală este așezată vertical o mică halteră formată din două bile mici identice, legate printr-o tijă subțire de masă neglijabilă, avînd distanța l între ele. Bilei superioare i se imprimă la un moment dat, printr-o lovitură, o viteză inițială orizontală v (fig. 6.32). **a)** Cît trebuie să fie această viteză pentru ca bila inferioară să se desprindă imediat de masă? **b)** Cît trebuie să fie această viteză pentru ca bila inferioară să se desprindă imediat de masă și haltera să cadă apoi pe masă în poziție orizontală?

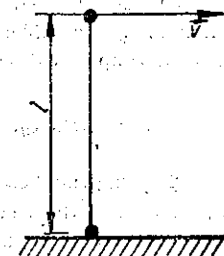


Fig. 6.32

R. a) $v > \sqrt{2lg}$; **b)** $v = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{lg} > \sqrt{2lg}$.

6.18. Un om ține în mînă de un capăt o tijă subțire uniformă de lungime l. La ce distanță de mînă trebuie lovită tija pentru ca omul să nu simtă lovitura ?

R. $\frac{2}{3}l$ — lungimea redusă a pendulului fizic (în centrul de oscilație).

6.19. O placă plană se află în repaus în planul orizontal. Raza de girație a plăcii în raport cu CM este R_g. Se aplică plăcii un impuls orizontal cu brațul b față de CM. Să se afle poziția centrului instantaneu de rotație după lovire. Unde trebuie fixat, imediat după aceasta, un punct al plăcii pentru ca ea să se oprească ?

R. În centrul de oscilație O' situat la distanța R_g^2/b de CM pe linia perpendiculară pe $\vec{H}$. În O care, reciproc, este centrul de oscilație față de O' (fig. 6.33).

6.20. O bară neuniformă de masă M se poate roti liber în jurul unei articulații la capătul superior. La distanța h de la articulație, ea este lovită perpendicular de un glonț de masă m, care rămîne înfipt în bară. Știind unghiul maxim α de deviere a barei, distanța R_0 a CM al barei pînă la articulație și momentul de inerție I față de articulație, să se afle viteza glonțului.

R. $v = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g(h + MR_0/m)(1 + I/mh^2)}$.

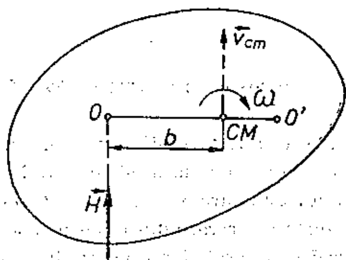


Fig. 6.33

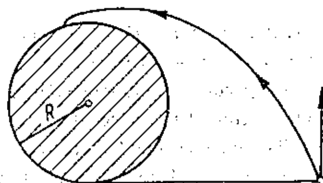


Fig. 6.34

6.21. De un stîlp cilindric vertical de rază R este prins un fir de lungime l (în planul orizontal) avînd la capăt o bilă (fig. 6.34). I se imprimă bilei o viteză orizontală v perpendicular pe fir. Neglijînd frecările, să se afle după cît timp bila lovește stîlpul.

R. $t = \frac{l^2}{2Rv}$

6.22. Un disc omogen de rază R, ținut orizontal și pus în rotație în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară ω este așezat pe un plan orizontal. Cunoscînd coeficientul de frecare la lunecare μ și considerînd că presiunea exercitată de disc pe plan este uniformă, să se afle după cît timp discul se va opri.

R. $t = 3\omega R/4\mu g$.

6.23. Un pendul conic este format dintr-o tijă subțire omogenă de lungime l, care se rotește în jurul axei verticale cu viteza unghiulară ω (capătul superior este prins într-o articulație fără frecări). Să se afle unghiul θ dintre tijă și axa verticală.

R. $\cos\theta = 3g/2\omega^2 l$.

CAPITOLUL 7

STATICA SOLIDULUI RIGID

Statica studiază *echilibrul* corpurilor sub acțiunea forțelor. Vom arăta că în cazul solidului *rigid* toate forțele aplicate pot fi reduse la o singură forță și la un cuplu.

7.1. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

Pentru echilibrul punctului material este necesar și suficient ca rezultanta tuturor forțelor aplicate să fie nulă :

$$\vec{F} = \sum\vec{F}_s = 0 \tag{7.1}$$

sau pe componente

$$F_x = \sum_s F_{sx} = 0\,; \quad F_y = \sum_s F_{sy} = 0, \quad F_z = \sum_s F_{sz} = 0. \tag{7.1'}$$

În acest caz, conform legii fundamentale a dinamicii :

$$m\vec{a} = \vec{F} = 0, \quad \vec{a} = 0, \ \vec{v} = \text{const}, \tag{7.2}$$

și dacă inițial particula era în repaus, ea va rămîne și mai departe în repaus.

Grafic, poligonul forțelor trebuie să fie închis.

În cazuri particulare cele trei condiții de echilibru se pot reduce la două (forțe în plan) sau la una singură (forțe pe aceeași dreaptă suport).

7.2. DEPLASAREA FORȚEI

a) Pentru solidul *rigid* forța poate fi deplasată de-a lungul dreptei suport, adică este un vector *glisant* (alunecător) (P. Varignon). Aceasta este echivalent cu introducerea sau suprimarea unui sistem de două forțe egale în

modul şi de sensuri opuse, situate *pe aceeaşi dreaptă*, ceea ce nu schimbă cu nimic starea rigidului, deoarece acesta este *nedeformabil*.

Introducem în punctul B un *sistem identic nul* de două forţe egale în modul şi de sensuri opuse $(\vec{F}', -\vec{F}')$ cu $|\vec{F}| = |\vec{F}'|$ (fig. 7.1). Forţele $\vec{F}, -\vec{F}'$ nu au nici un efect asupra solidului rigid şi pot fi suprimate, astfel încît rămîne forţa $\vec{F}'$, adică rezultatul deplasării forţei $\vec{F}$ din A în B.

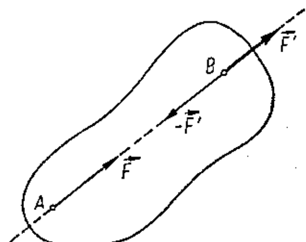


Fig. 7.1

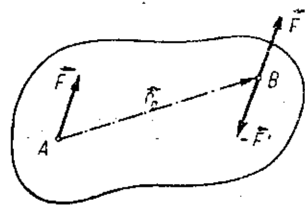


Fig. 7.2

În cazul corpurilor deformabile forţa nu poate fi deplasată pe suportul său, fiindcă astfel ar produce alte efecte de deformare (de exemplu, o bară *împinsă* la un capăt sau *trasă* cu aceeaşi forţă de celălalt capăt).

b) O forţă poate fi deplasată *paralel* cu ea însăşi (adică *echipolent*), dar atunci apare şi un *cuplu* de forţe, adică două forţe paralele, egale în modul şi de sensuri opuse (fig. 7.2). În adevăr, introducem în B un sistem identic nul de două forţe egale în modul şi de sensuri opuse $(\vec{F}', -\vec{F}')$ cu $|\vec{F}'| = |\vec{F}|$. Atunci forţa $\vec{F}$ din A apare deplasată în B, anume $\vec{F}'$ dar apare un cuplu de forţe $(\vec{F}, -\vec{F}')$.

c) *Momentul unui cuplu* de forţe faţă de *orice* punct din spaţiu este *acelaşi* (fig. 7.3), deci este o proprietate *intrinsecă* a cuplului:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \vec{F} = -\vec{r}_0 \times (-\vec{F}). \qquad (7.3)$$

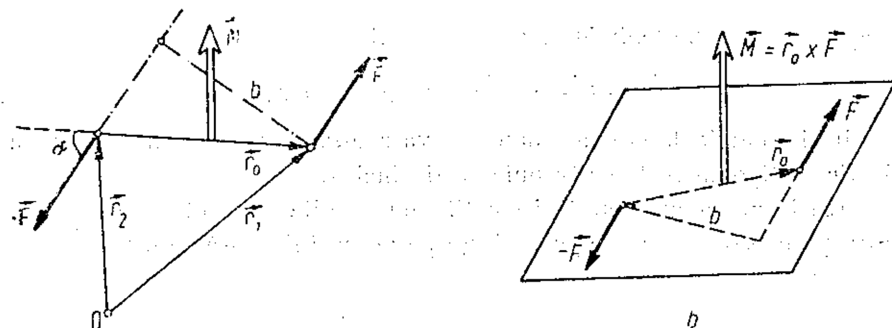


Fig. 7.3

Vectorul $\vec{M}$ este perpendicular pe planul $(\vec{F}, -\vec{F})$ şi are modulul:

$$M = Fr_0 \sin\alpha = Fb, \qquad (7.4)$$

unde b este *braţul cuplului*, adică distanţa dintre suporturile celor două forţe.

Cuplul $(\vec{F}, -\vec{F}')$ din figura 7.2, generat de deplasarea forţei $\vec{F}$ din A în B $(\vec{r}_0 = \vec{AB})$ are momentul $\vec{r}_0 \times (-\vec{F}') = -\vec{r}_0 \times \vec{F}$.

d) Forţa $\vec{F}$ din A în figura 7.2 are faţă de punctul B acelaşi moment $-\vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times (-\vec{F}')$ ca şi cuplul generat $(\vec{F}, -\vec{F}')$, forţa $\vec{F}'$ avînd moment nul faţă de B.

Prin deplasarea unei forţe $\vec{F}$ din punctul A într-un punct B cu vectorul $\vec{r}_0 = \vec{AB}$ (fig. 7.4) momentul ei faţă de un pol oarecare P se schimbă cu

$$\Delta\vec{M} = \vec{r}' \times \vec{F}' - \vec{r} \times \vec{F} =$$

$$= (\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \vec{F}' = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \qquad (7.5)$$

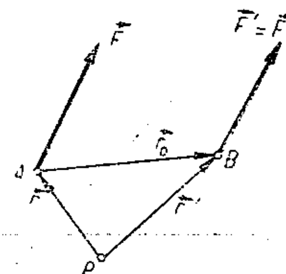


Fig. 7.4

adică minus momentul cuplului generat prin deplasarea forţei sau minus momentul forţei iniţiale faţă de noul punct. Prin urmare, *dacă deplasăm echipolent o forţă $\vec{F}$ cu segmentul $\vec{r}_0$, trebuie să introducem un cuplu compensator $\vec{M} = -\vec{r}_0 \times \vec{F}$ egal cu momentul forţei iniţiale faţă de noul punct* (moment care s-ar pierde prin deplasarea forţei în acel punct).

7.3. COMPUNEREA FORŢELOR PARALELE

Introducem două forţe $\vec{f}, -\vec{f}$ egale în modul şi de sensuri opuse în A, respectiv B, pe care le compunem cu forţele date. Obţinem două forţe concurente pe care ştim să le compunem după regula paralelogramului (fig. 7.5).

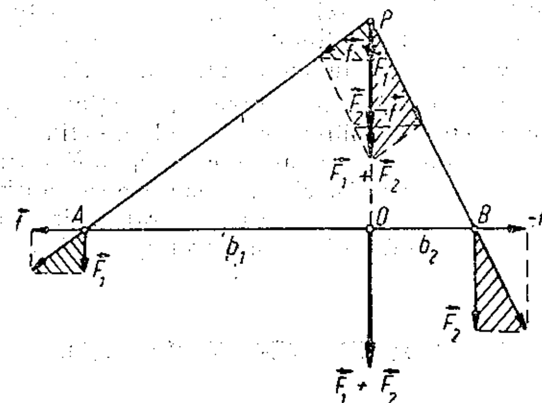


Fig. 7.5

Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\frac{f}{b_1} = \frac{F_1}{PO} \rightarrow F_1 b_1 = f \cdot PO\,; \quad \frac{f}{b_2} = \frac{F_2}{PO} \rightarrow F_2 b_2 = f \cdot PO,$$

de unde

$$F = F_1 + F_2,\ F_1 b_1 = F_2 b_2 \text{ sau } F_1/F_2 = b_2/b_1, \qquad (7.6)$$

adică condiția ca momentele celor două forțe $\vec{F}_{1,2}$ față de un punct (O) de pe suportul rezultantei să fie egale în modul și opuse ca sens (dînd moment rezultant nul, ca și rezultanta lor). Rezultanta este egală cu suma forțelor $F = F_1 + F_2$, este paralelă cu forțele date și situată la distanțele $b_{1,2}$ (7.6) de forțele date, mai aproape de forța mai mare.

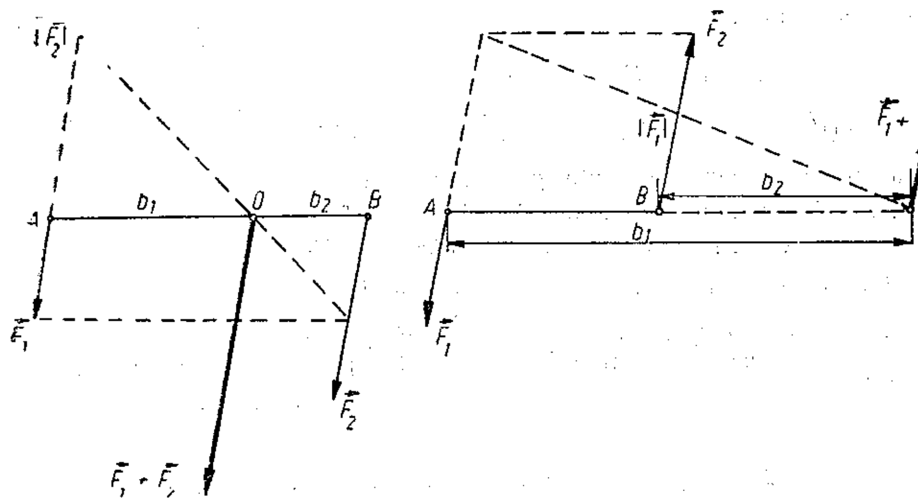


Fig. 7.6

O construcție analogă pentru forțe antiparalele (diferite în modul) ne dă rezultanta $F = |F_2 - F_1|$, paralelă cu forțele date și situată la distanțele $b_{1,2}$ (7.6) de forțele date, dar în afara segmentului AB, de partea forței mai mari și în sensul forței mai mari (fig. 7.6 ; $b_{1,2}$ din figură nu sînt chiar distanțele dintre forțe, dar sînt proporționale cu ele și deci (7.6) este valabil).

Dacă $F_1 = F_2$ avem un cuplu cu rezultanta nulă, aruncată la infinit.

O demonstrație mai rapidă și mai directă se obține deplasînd *echipolent* forțele date (conform regulii stabilite) în punctul O, definit prin raportul distanțelor sale $b_{1,2}$ pînă la forțele date, astfel ca $F_1 b_1 = F_2 b_2$ (interior sau exterior segmentului AB după cum forțele sînt paralele sau antiparalele) și compunînd forțele în acest punct O. Cuplurile generate prin deplasarea forțelor se anihilează reciproc tocmai datorită condiției impuse $F_1 b_1 = F_2 b_2$.

7.4. COMPUNEREA CUPLURILOR

Un cuplu dat, de moment $\vec{M}$, poate fi transformat în cazul *rigidelor* în oricare alt cuplu de moment *echipolent* cu $\vec{M}$. Cu alte cuvinte, cuplul poate fi deplasat oricum în planul său sau într-un alt plan paralel și poate fi schimbat brațul cuplului schimbînd însă în raport invers forțele, astfel ca vectorul moment $\vec{M}$ să rămînă *același*. Prin urmare (Louis Poinsot 1804) :

Pentru rigide un cuplu de forțe este complet caracterizat de momentul său $\vec{M}$ considerat vector **liber.**

O ilustrare este dată în figura 7.7.

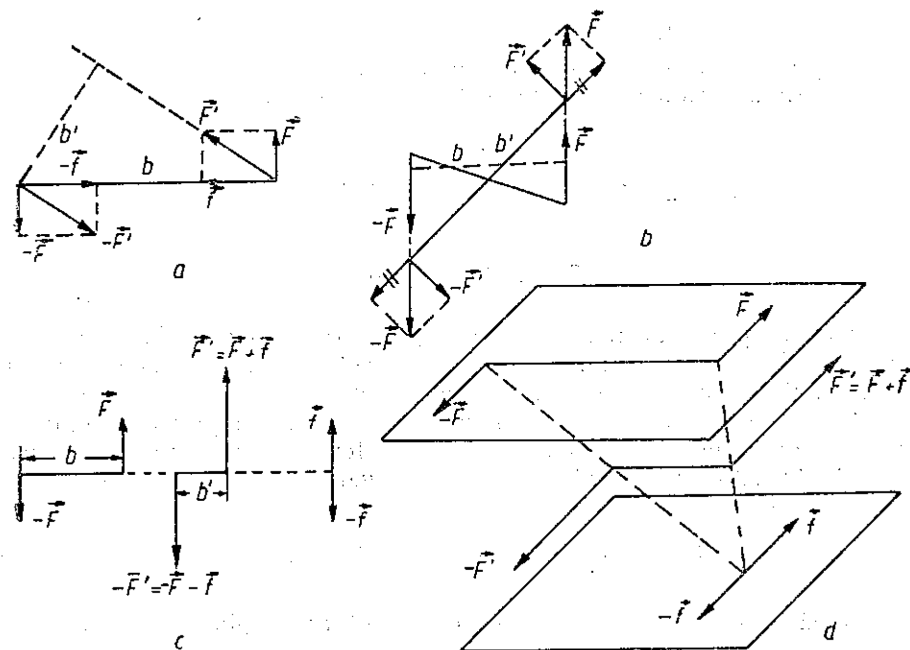


Fig. 7.7

Cuplurile se compun prin adunarea vectorială a momentelor lor, considerate vectori liberi.

În adevăr, dacă două cupluri sînt în plane *paralele*, deci și momentele lor sînt paralele, îi aducem în același plan, îi transformăm ca să aibă *același braț* și adunăm (sau scădem) forțele, atunci se adună (sau se scad) și momentele lor :

$$F = F_1 \pm F_2,\ Fb = F_1 b \pm F_2 b,$$

$$M = M_1 \pm M_2.$$

Dacă cele două cupluri sînt în plane *secante*, îi transformăm să aibă *aceleași forțe*, aducem forțele opuse pe linia de intersecție a planelor, unde ele se vor anula (punctul C, fig. 7.8) și rămîne cuplul din A, B. Triunghiurile ABC și CMM_1 sînt asemenea, deoarece au un unghi

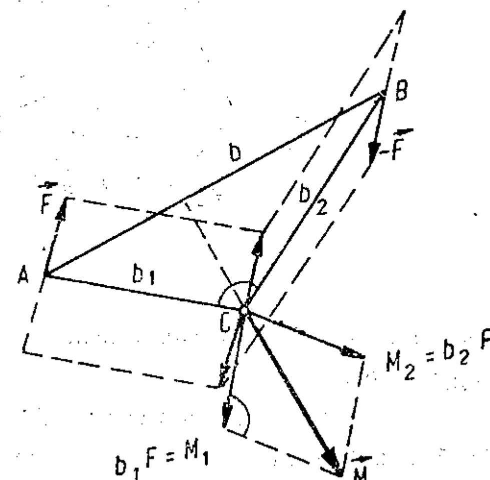


Fig. 7.8

egal $\angle ABC = \angle CM_1M$ (au laturi perpendiculare) cuprins între laturi proporţionale :

$$CM_1 = b_1F = AC\cdot F, \; M_1M = b_2F = CB\cdot F.$$

Rezultă că şi latura a treia :

$$M = |\vec{M}_1 + \vec{M}_2| = AB\cdot F = bF$$

şi este perpendiculară pe AB, deci momentul cuplului rezultant este în adevăr suma vectorială a momentelor cuplurilor componente.

7.5. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORŢE

7.5.1. REDUCEREA

Alegem un punct arbitrar O, numit *punct (centru) de reducere sau pol*. Deplasăm *echipolent* toate forţele în acest punct — atunci apar şi cuplurile respective. Problema s-a redus astfel la compunerea forţelor concurente în punctul O, conform regulii paralelogramului, şi la compunerea cuplurilor respective, adică la compunerea momentelor lor, tot după regula paralelogramului (fig. 7.9). Momentul oricărui cuplu generat este egal cu momentul forţei respective faţă de pol.

$$\vec{F} = \sum\vec{F}_s, \quad \vec{M} = \sum\vec{M}_s = \sum\vec{r}_s \times \vec{F}_s. \tag{7.7}$$

Teoremă : *Un sistem arbitrar de forţe $\vec{F}_s$ aplicate unui* **rigid** *se reduce, în raport cu un anumit pol, la o rezultantă $\vec{F} = \sum\vec{F}_s$ aplicată în pol, şi la un cuplu al cărui*

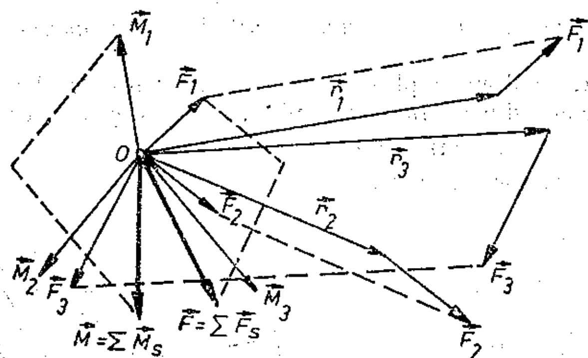


Fig. 7.9

moment $\vec{M}$ este egal cu suma momentelor forţelor faţă de pol: $\vec{M} = \sum\vec{M}_s = \sum\vec{r}_s \times \vec{F}_s$.

Dacă acum reprezentăm cuplul $\vec{M}$ prin cele două forţe astfel ca una din ele să fie aplicată în pol şi o compunem acolo cu rezultanta $\vec{F}$, reducem astfel sistemul numai la *două forţe* :

Un sistem arbitrar de forţe aplicate unui rigid se reduce fie la un cuplu (două forţe antiparalele), fie la două forţe strîmbe în spaţiu (neparalele), dintre care una aplicată în polul ales şi avînd o direcţie aleasă.

7.5.2. INVARIANŢII

Mărimea rezultantei este independentă de alegerea polului :
Rezultanta se deplasează echipolent în noul pol.

Cuplul însă se schimbă, deoarece deplasînd rezultanta în noul pol O', va apărea un cuplu suplimentar, după cum ştim (fig. 7.10) :

$$\vec{M}' = \sum_s \vec{r}'_s \times \vec{F}_s = \sum_s (\vec{r}_s - \vec{r}_0) \times \vec{F}_s =$$
$$= \vec{M} - \vec{r}_0 \times \vec{F}, \tag{7.8}$$

adică exact momentul rezultantei din vechiul pol O faţă de noul pol O' (în concordanţă cu regula deplasării forţei).

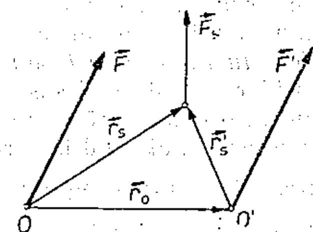


Fig. 7.10

Momentul nu se schimbă dacă polul se deplasează pe suportul rezultantei (atunci $\vec{r}_0 \parallel \vec{F}$).

Dacă rezultanta este nulă, momentul este independent de alegerea polului şi sistemul se reduce numai la un cuplu.

Înmulţind scalar (7.8) cu $\vec{F}$ rezultă (produsul vectorial mixt este nul dacă doi vectori sînt egali sau paraleli) :

$$\vec{F}\vec{M}' = \vec{F}\vec{M} = FM' \cos(\vec{F}, \vec{M}') = FM \cos(\vec{F}, \vec{M}),$$
$$M'_{\parallel} = M_{\parallel} = \text{invar}, \tag{7.9}$$

proiecţia momentului pe forţa rezultantă este independentă de alegerea polului (componenta longitudinală a momentului este un invariant sau produsul scalar $\vec{F}\vec{M}$ este un invariant).

Componenta transversală a momentului, perpendiculară pe forţa rezultantă, se schimbă prin deplasarea polului.

7.5.3. AXA CENTRALĂ

Putem alege totdeauna polul astfel ca să anulăm componenta transversală a momentului, deci ca momentul rezultant să fie *paralel* cu forţa rezultantă.

Teoremă. *Sistemul de forţe aplicate unui rigid se poate reduce totdeauna la o rezultantă şi un cuplu situat în planul perpendicular pe rezultantă, adică cu moment paralel cu rezultantă.*

Dreapta suport a rezultantei se numeşte în acest caz *axa centrală* a sistemului de forţe.

În adevăr, dacă $\vec{M}$ *nu* este paralel cu $\vec{F}$, alegem drept pol, de exemplu, punctul

$$\vec{r}_c = \frac{1}{F^2}\vec{F} \times \vec{M}. \tag{7.10}$$

Atunci, conform lui (7.8), noul moment $\vec{M}'$ va fi:

$$\vec{M}' = \vec{M} - \vec{r}_c \times \vec{F} = \vec{M} - \frac{1}{F^2}(\vec{F} \times \vec{M}) \times \vec{F} =$$

$$= \vec{M} + \frac{1}{F^2}\vec{F} \times (\vec{F} \times \vec{M}) = \vec{M} + \frac{1}{F^2}\vec{F}(\vec{F}\vec{M}) - \vec{M} = \qquad (7.11)$$

$$= \frac{1}{F^2}\vec{F}(\vec{F}\vec{M}), \text{ paralel cu } \vec{F},$$

adică în adevăr, noul moment este paralel cu $\vec{F}$.

Prin urmare, printr-o deplasare *paralelă* adecvată a rezultantei putem totdeauna anula componenta *transversală* a momentului rezultant, *componenta longitudinală fiind însă invariantă.*

Considerațiile de mai sus privind reducerea unui sistem de forțe aplicate rigidului la o rezultantă și un cuplu seamănă cu considerațiile privind reducerea mișcării unui rigid la o rotație și o translație, adică reducerea vitezelor la o viteză de rotație (unghiulară) $\vec{\omega}$ și o viteză de translație $\vec{v}_0$. Forța $\vec{F}$ corespunde vitezei unghiulare $\vec{\omega}$, iar cuplul $\vec{M}$ corespunde vitezei de translație $\vec{v}_0$ (vom vedea mai tîrziu că un cuplu de rotații este echivalent cu o translație).

7.5.4. TEOREMA LUI P. VARIGNON (1725)

Momentul în raport cu un pol oarecare al rezultantei unui sistem de forțe concurente este egal cu suma vectorială a momentelor forțelor componente față de pol:

$$\vec{r}_0 \times \sum\vec{F}_s = \sum\vec{r}_0 \times \vec{F}_s.$$

Aplicații. *a) Sistem de forțe conținute în plan.* Dacă rezultanta este nulă, sistemul este echivalent cu un cuplu. Alegînd polul în plan, momentul rezultant va fi perpendicular pe plan, și dacă rezultanta (conținută în plan) nu e nulă, o putem deplasa convenabil ca să anulăm momentul (care e transversal), deci în acest caz *sistemul este echivalent cu o forță rezultantă situată pe o anumită dreaptă* — **axă centrală**. Momentul rezultant față de orice punct este de fapt momentul acestei rezultante unice față de acel punct.

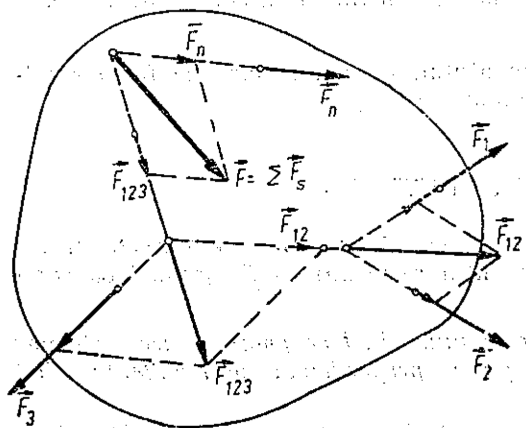


Fig. 7.11

Observații. 1. Cazul plan poate fi tratat elementar, compunînd forțele *succesiv* după regula paralelogramului, fiind necesară pentru aceasta *doar deplasarea* forțelor pe suportul lor.

De exemplu, în figura 7.11, compunem forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ deplasîndu-le pe suporturile lor pînă în punctul lor de intersecție: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{12}$. Apoi compunem $\vec{F}_{12}$ cu $\vec{F}_3$, deplasîndu-le pe suporturile lor pînă în punctul de intersecție: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_{123}$ ș.a.m.d. Pînă la urmă obținem o rezultantă $\vec{F} = \sum\vec{F}_s$ situată pe un *anumit* suport — *axa centrală* a sistemului plan de forțe.

Reciproc, orice forță poate fi descompusă după *oricîte* direcții date, coplanare cu ea, procedînd invers ca mai sus.

2. Forța rezultantă a unui sistem de forțe plane (pot fi și forțe paralele) se poate obține prin *metoda poligonului funicular.*

Să considerăm pentru ilustrare cazul a trei forțe (fig. 7.12). Construim poligonul forțelor (fig. 7.12, *b*). Pentru a afla axa centrală sau suportul rezultantei, ducem dintr-un pol arbitrar O „raze" care să-l unească cu originea și extremitatea fiecărei forțe din poligonul forțelor (fig. 7.12, *b*). Apoi printr-un punct arbitrar de pe suportul primei forțe $\vec{F}_1$ ducem o paralelă la prima „rază" α și o paralelă la raza 1—2 pînă la intersecția acesteia din urmă cu suportul forței $\vec{F}_2$. Din acest punct ducem o paralelă la raza 2—3 pînă la intersecția suportului forței $\vec{F}_3$ și așa mai departe pînă la intersecția suportului ultimei forțe. Din acest ultim punct ducem o paralelă la ultima rază ω. La intersecția primei raze α cu ultima ω găsim un punct al rezultantei sau al axei centrale.

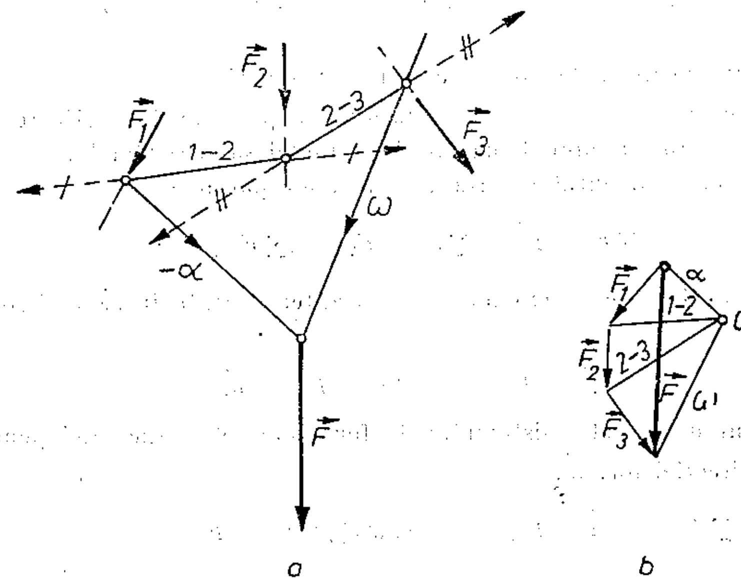


Fig. 7.12

În adevăr, fiecare forță este diferența vectorială a celor două raze. Trasîndu-le pe laturile poligonului funicular, aceste raze se reduc două cîte două (fiind opuse și pe același suport) afară de razele extreme α și ω, care dau rezultanta.

Dacă sistemul de forțe este în *echilibru* (rezultantă nulă și moment rezultant nul), atunci poligonul forțelor se închide și poligonul funicular se închide (razele α și ω coincid).

Dacă sistemul de forțe se reduce la un *cuplu*, poligonul forțelor se închide, iar poligonul funicular rămîne *deschis*: cele două raze extreme α și ω vor fi paralele distincte.

b) Sistem de forțe paralele în spațiu. Rezultanta are aceeași direcție cu forțele (care pot fi paralele sau antiparalele). Momentele sînt perpendiculare pe forțe, deci conținute în planul perpendicular pe rezultantă. Sistemul se reduce fie la un cuplu, dacă rezultanta este nulă, fie la o rezultantă situată pe o dreaptă determinată — *axa centrală*, paralelă cu direcția forțelor date (v. compunerea forțelor paralele). Momentul rezultant față de orice punct este de fapt momentul acestei forțe unice față de acel punct. În particular, obținem regulile cunoscute de compunere a două forțe paralele (sau antiparalele).

Mai mult, *un sistem de forțe paralele în spațiu (cu rezultantă nenulă) admite* **un centru** *al forțelor paralele,* în sensul că rotind întregul sistem de forțe paralele, rezultanta (sau axa centrală) trece printr-un *punct fix*, definit prin vectorul de poziție:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{F}\sum F_k\vec{r}_k, \ (F = \sum F_k), \tag{7.12}$$

unde $\vec{r}_k$ sînt vectorii de poziție ai forțelor, iar $\vec{F}_k = F_k\vec{n}$, $(F_k = \pm|\vec{F}_k|)$, unde $\vec{n}$ este un versor ales pe direcția forțelor paralele (fig. 7.13) (centrul se schimbă dacă forțele sînt deplasate de-a lungul suporturilor lor).

În adevăr, momentul rezultant al forțelor paralele

$$\sum\vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum\vec{r}_k \times F_k\vec{n} = \sum F_k\vec{r}_k \times \vec{n}$$

trebuie să fie identic cu momentul rezultantei aplicate în centrul forțelor $\vec{r}_c$ (7.12):

$$\vec{r}_c \times \vec{F} = \vec{r}_c \times F\vec{n} = F\vec{r}_c \times \vec{n},$$

independent de direcția sistemului de forțe paralele, adică independent de versorul direcției lor, $\vec{n}$:

$$\sum F_k\vec{r}_k \times \vec{n} = F\vec{r}_c \times \vec{n} \quad \text{sau} \ (\sum F_k\vec{r}_k - F\vec{r}_c) \times \vec{n} = 0,$$

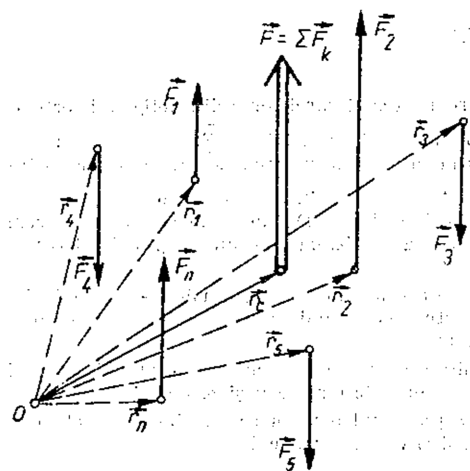


Fig. 7.13

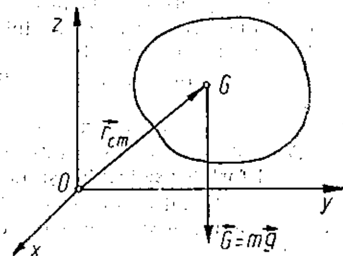


Fig. 7.14

ceea ce, în virtutea definiției (7.12), este în adevăr valabil pentru *orice* direcție $\vec{n}$ a forțelor paralele.

În particular, *forțele de greutate* dau o rezultantă bine determinată $\vec{G}$ care trece prin *centrul de greutate* (coincide cu centrul de masă) $\vec{r}_{cm}$, așa cum l-am definit (fig. 7.14). În adevăr, pentru orice orientare a lui $\vec{g}$, momentul rezultantei $m\vec{g}$ trebuie să fie egal cu momentul rezultant al forțelor de greutate paralele elementare:

$$\vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = \int \vec{r} \times \vec{g}\, dm \quad \text{sau} \quad (m\vec{r}_{cm} - \int \vec{r}\, dm) \times \vec{g} = 0,$$

ceea ce este adevărat pentru orice orientare a lui $\vec{g}$, datorită definiției lui $\vec{r}_{cm}$.

7.6. CONDIȚIILE DE ECHILIBRU

Mișcarea rigidului se descompune în mișcarea de translație a centrului de masă sub acțiunea rezultantei forțelor aplicate ($\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$) și într-o mișcare de rotație în jurul unei axe trecînd prin CM sub acțiunea momentului rezultant ($\vec{M}_0 = d\vec{S}/dt$). Pentru a nu produce mișcarea de translație a centrului de masă, *rezultanta tuturor forțelor trebuie să fie nulă.* Pentru a nu produce rotația rigidului în jurul centrului de masă, *momentul rezultant al tuturor forțelor aplicate trebuie să fie nul*:

$$\vec{F} = \sum_s \vec{F}_s = 0, \quad \vec{M} = \sum_s \vec{M}_s = \sum_s \vec{r}_s \times \vec{F}_s = 0. \tag{7.13}$$

Observăm că deși rezultanta și momentul rezultant al forțelor *interne* sînt totdeauna *nule*, totuși la corpurile *deformabile* sistemul forțelor *interne nu este* în general în echilibru!

Scrise pe componente într-un SC ortogonal (polul este în originea sistemului de coordonate), ecuațiile vectoriale (7.13) dau:

$$\begin{cases} F_x = \sum\limits_s F_{sx} = 0, \\ F_y = \sum\limits_s F_{sy} = 0, \\ F_z = \sum\limits_s F_{sz} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} M_x = \sum\limits_s M_{sx} = \sum\limits_s (y_sF_{sz} - z_sF_{sy}) = 0, \\ M_y = \sum\limits_s M_{sy} = \sum\limits_s (z_sF_{sx} - x_sF_{sz}) = 0, \\ M_z = \sum\limits_s M_{sz} = \sum\limits_s (x_sF_{sy} - y_sF_{sx}) = 0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Momentele pot fi luate nu numai față de CM, ci față de *orice punct*, întrucît în virtutea primei condiții (rezultantă nulă $\vec{F} = 0$) momentul rezultant nu va depinde de alegerea polului.

Prin urmare, *avem în general 6 condiții universale de echilibru pentru un solid rigid*: 3 pentru forța rezultantă și 3 pentru momentul rezultant.

Pentru a scrie condițiile de echilibru, izolăm mintal rigidul de mediul său și reprezentăm toate forțele care acționează asupra sa din partea mediului său exterior, adică „eliberăm rigidul de legături" dar introducînd reacțiunile corespunzătoare ale legăturilor. Pentru rigidul „liber" astfel obținut, adică eliberat de legături dar supus la forțele de reacțiune ale legăturilor, scriem condițiile universale de echilibru.

În cazuri particulare, numărul condițiilor de echilibru se poate reduce. Astfel, dacă toate forțele sînt conținute într-un *plan*, avem 2 condiții pentru forța rezultantă și 1 condiție pentru momentul rezultant, deci în total 3 condiții.

Dacă forțele sînt *concurente* în spațiu, avem iarăși numai 3 condiții pentru rezultantă, și dacă sînt concurente în plan — numai 2 condiții pentru rezultantă.

Dacă forțele sînt *paralele în spațiu*, avem 3 condiții : 1 pentru rezultantă și 2 pentru moment.

Exemplu. O scară uniformă este sprijinită de un perete. Cunoscînd coeficienții de frecare cu podeaua μ_1 și cu peretele μ_2, să se determine unghiul α dintre scară și podea în momentul limită cînd scara începe să lunece (fig. 7.15).

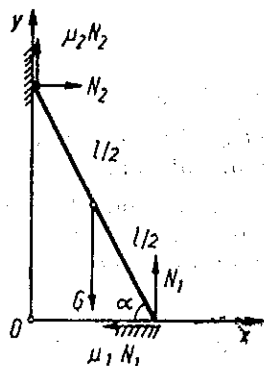


Fig. 7.15

Rezolvare. Considerăm cazul limită, adică exact poziția cînd scara începe să lunece, atunci forțele de frecare devin cele arătate în figura 7.15 ($F_f = \mu N$) și avem

$$N_2 - \mu_1 N_1 = 0, \mu_2 N_2 - G + N_1 = 0,$$

$$G\frac{l}{2}\cos\alpha - N_2 l \sin\alpha - \mu_2 N_2 l \cos\alpha = 0$$

(forțele de frecare nu dau moment față de originea O), de unde rezultă :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_1},$$

independent de masa și lungimea scării.

7.7. REDUCEREA „FORȚELOR DE INERȚIE"

Să reducem la o rezultantă și un cuplu „forțele" $m_k\vec{a}_k$.

Deoarece rezultanta forțelor interne este nulă și momentul rezultant al forțelor interne față de orice pol este nul, sistemul de forțe externe aplicate rigidului se reduce față de orice pol într-un SR *inerțial exact* la aceeași rezultantă și același cuplu (moment) ca și „forțele" $m_k\vec{a}_k$ (față de același pol).

În adevăr, să facem această reducere față de originea unui sistem de coordonate S cartezian ortogonal (nu neapărat inerțial).

În virtutea definiției centrului de masă $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm$, avem pentru rezultantă :

$$\int \vec{a}\,dm = (\int \vec{r}\,dm)^{\cdot\cdot} = (m\vec{r}_{cm})^{\cdot\cdot} = m\vec{a}_{cm}. \tag{7.15}$$

Dacă sistemul de coordonate S este *inerțial*, atunci bineînțeles $m\vec{a}_{cm} = \vec{F}$ — rezultanta forțelor externe aplicate rigidului.

Pentru momentul rezultant vom face descompunerea *față de* CM :

$$\int \vec{r} \times \vec{a}\,dm = \int (\vec{r}_{cm} + \vec{r}\,') \times [\vec{a}_{cm} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')]dm = \tag{7.16}$$

$$= \vec{r}_{cm} \times m\vec{a}_{cm} + \int \vec{r}\,' \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,')dm + \omega \times \int \vec{r}\,' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')dm,$$

unde ceilalți termeni s-au anulat din cauză că $\int \vec{r}\,'\,dm = m\vec{r}\,'_{cm} \equiv 0$ și am folosit faptul că $\vec{r}\,' \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')] \equiv \vec{\omega} \times [\vec{r}\,' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')]$, ceea ce se verifică imediat prin dezvoltarea dublelor produse vectoriale din parantezele mari.

Reamintindu-ne de calculul analitic făcut la momentul cinetic, putem scrie

$$\int \vec{r}\,' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')dm = \hat{I}'\vec{\omega}, \quad \int \vec{r}\,' \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,')dm = \hat{I}'\vec{\varepsilon}, \tag{7.17}$$

unde $\hat{I}'$ este matricea momentelor de inerție față de un sistem de coordonate S' *cu originea în* CM (acest S' în rest poate fi arbitrar, de exemplu, SC *propriu* al rigidului *cu originea în* CM, însă cu $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ calculați în sistemul de coordonate inițial S). Prin urmare,

$$\int \vec{r} \times \vec{a}\,dm = \vec{r}_{cm} \times m\vec{a}_{cm} + \hat{I}'\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\hat{I}'\vec{\omega}); \tag{7.18}$$

primul termen dă momentul rezultantei (7.15) aplicate în CM (este partea orbitală sau externă), iar ceilalți doi termeni dau momentul față de CM (partea proprie sau internă).

Dacă sistemul de coordonate S este *inerțial*, atunci momentul

$\int \vec{r} \times \vec{a}\,dm = \vec{M}$ — momentul forțelor externe aplicate rigidului.

Descompunîndu-l pe $\vec{M}$ față de CM :

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_s \times \vec{F}_s = \sum (\vec{r}_{cm} + \vec{r}\,'_s) \times \vec{F}_s =$$

$$= \vec{r}_{cm} \times \sum \vec{F}_s + \sum \vec{r}\,'_s \times \vec{F}_s = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} + \vec{M}',$$

și ținînd seama că $m\vec{a}_{cm} = \vec{F}$, rezultă față de CM :

$$\vec{M}' = \hat{I}'\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\hat{I}'\vec{\omega}) \text{ față de CM.} \tag{7.19}$$

Am regăsit astfel rezultatele cunoscute.

Observație. Dacă pe lîngă forțele externe reale aplicate rigidului, reprezentăm și „forțele de inerție" ($-m_k\vec{a}_k$), reduse la o rezultantă și un cuplu față de un pol ales convenabil, atunci rigidul apare în „echilibru" sub acțiunea tuturor acestor forțe și putem scrie condițiile de echilibru pentru ansamblul acestor forțe *(metoda cinetostatică)*.

7.8. TEOREMELE LUI GULDIN ȘI PAPPUS

I. Aria suprafeței generate prin rotirea unui arc de curbă plană în jurul unei axe situată în planul acestui arc de curbă și neintersectîndu-l, este egală cu produsul dintre lungimea arcului de curbă și lungimea cercului descris de centrul de masă al arcului de curbă.

II. Volumul corpului generat prin rotirea unei figuri plane în jurul unei axe, situată în planul figurii și neintersectînd-o, este egal cu produsul dintre aria figurii și lungimea cercului descris de centrul de masă al figurii.

Teoremele au fost descoperite în sec. III de matematicianul și mecanicianul grec Pappus din Alexandria. În sec. XVII P. Guldin le-a „descoperit" în volumul VII al operelor lui Pappus.

Demonstrație. *a*) Aria se obține prin însumarea (integrarea) ariilor laterale ale trunchiurilor de con elementare [aria laterală a unui trunchi de con este $\pi G(r + R)$] (fig. 7.16):

$$S = \int 2\pi y \, ds, \text{ dar } y_{cm} = \frac{1}{l} \int y \, ds,$$

de unde în adevăr

$$S = 2\pi y_{cm} l.$$

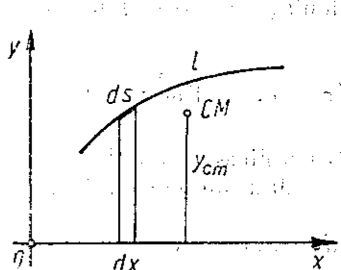


Fig. 7.16

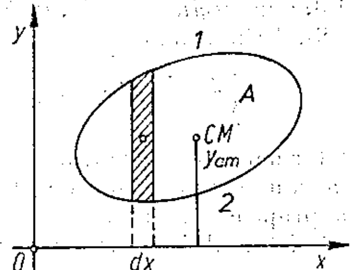


Fig. 7.17

b) Analog, sumînd volumele trunchiurilor de con elementare $\left(V = \frac{\pi}{3} h(r^2 + R^2 + rR)\right)$ (fig. 7.17):

$$V = \int_{(1)} \pi y^2 \, dx - \int_{(2)} \pi y^2 \, dx = \int \pi (y_1^2 - y_2^2) dx,$$

dar

$$y_{cm} = \frac{1}{A} \int (y_1 - y_2) dx \cdot \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = \frac{1}{A} \int \frac{1}{2} (y_1^2 - y_2^2) dx,$$

de unde în adevăr

$$V = 2\pi y_{cm} A.$$

Exemple. a) Să se calculeze aria și volumul unui *tor* de raze r, R.
Rezolvare. Aplicînd teoremele Guldin-Pappus:

$$S = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 rR, V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$$

b) Să se afle volumul corpului generat prin rotirea unui triunghi dreptunghic cu catetele a, b, în jurul ipotenuzei.

Rezolvare.

$$V = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi \frac{h}{3} = \frac{\pi}{3} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

PROBLEME

7.1. Să se deducă *ecuația axei centrale*

$$\vec{r} = \vec{r}_c + \lambda \vec{F} = \frac{1}{F^2} \vec{F} \times \vec{M} \times \lambda \vec{F}, \quad \lambda - \text{parametru}.$$

Indicație. Dacă r_c este lungimea perpendicularei din polul O pe axa centrală, trebuie să avem:

$$\vec{r}_c = \mu \vec{F} \times \vec{M} \quad \text{sau} \quad r_c = \mu F M_\perp \quad \text{și} \quad M_\perp = r_c F.$$

7.2. Să se afle locul geometric al extremităților vectorilor-forță aplicate într-un punct dat A, care dau același moment $\vec{M}$ față de un pol dat O.

R. Dreaptă paralelă la AO situată în planul perpendicular pe $\vec{M}$, la distanța $M/\overline{AO}$ de dreapta AO.

7.3. Asupra unui rigid lucrează forțele situate în plan și reprezentate prin poligonul forțelor din figura 7.18. Să se reducă acest sistem la originea primului vector.

R. Rezultanta este linia de închidere AF a conturului poligonal, iar momentul este egal în modul cu dublul ariei poligonului $ABCDEF$ și este perpendicular pe plan.

7.4. Să se afle locul geometric al extremităților vectorului moment al rezultantei unui sistem de forțe în plan, calculat în raport cu toate punctele acestui plan.

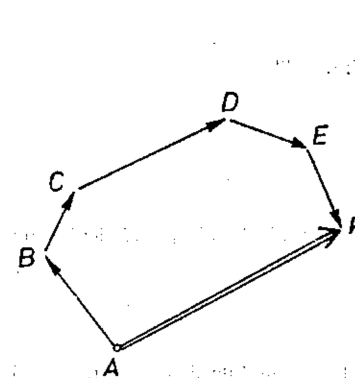


Fig. 7.18

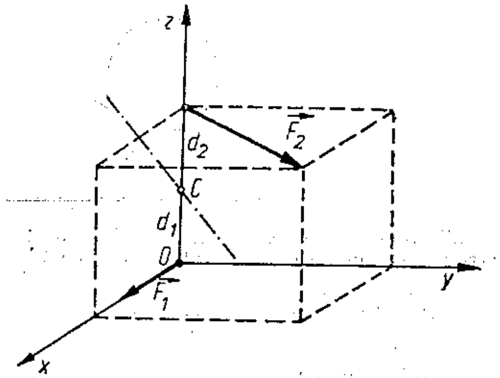


Fig. 7.19

R. Un plan care taie planul forțelor după axa centrală.

7.5. Să se arate că momentul rezultant în raport cu o axă este proiecția pe acea axă a momentului rezultant calculat în raport cu un punct *arbitrar* de pe axă.

7.6. Un sistem de forțe poate fi redus, după cum știm, la două forțe, ca de exemplu în figura 7.19. Să se arate că axa centrală intersectează normal perpendiculara comună a celor două forțe la distanțele

$$d_{1,2} = d(F_{2,1}^2 + \vec{F}_1 \vec{F}_2) : (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 \text{ pînă la forțe, } (d = d_1 + d_2).$$

7.7. Peste un semicilindru fix de rază R, așezat orizontal, se sprijină transversal o tijă uniformă de lungime l, ca în figura 7.20. Coeficientul de frecare la lunecare dintre tijă și cilindru este μ_1, iar dintre tijă și plan μ_2. Să se calculeze ctg α_{max} la echilibru.

R. $$\text{ctg}\, \alpha_{max} = \frac{l}{4R\mu_2} \cdot \left[\mu_2 - \mu_1 + \sqrt{(\mu_2 - \mu_1)^2 + \frac{8R}{l} \mu_2 \left(1 + \mu_1 \mu_2 - 2\mu_2 \frac{R}{l}\right)} \right].$$

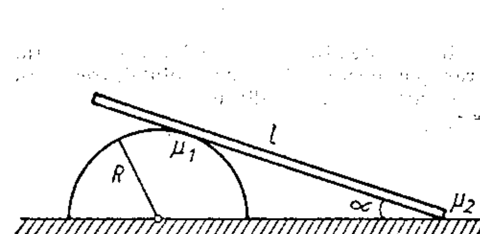


Fig. 7.20

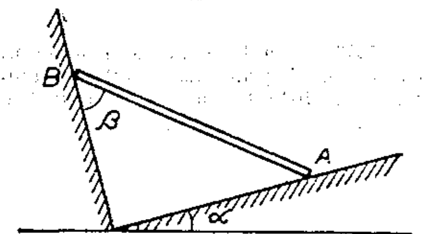


Fig. 7.21

7.8. O bară omogenă AB de greutate G se sprijină pe două plane perpendiculare între ele ca în figura 7.21. Cît de mare este unghiul β în poziția de echilibru, dacă unghiul de frecare al barei cu planele este φ?

$$\alpha - 2\varphi \leqslant \beta \leqslant \alpha + 2\varphi.$$

7.9. Un punct material greu se poate deplasa cu frecare pe un cerc (în interior și în exterior) de rază R așezat într-un plan vertical. La ce înălțimi față de centrul cercului poate fi în echilibru punctul material, dacă unghiul de frecare este φ?

R. $h \leqslant -R\cos\varphi$ și $h \geqslant R\cos\varphi$.

7.10. Un cilindru circular drept este menținut în echilibru pe un plan înclinat cu ajutorul unui fir înfășurat pe cilindru și tras paralel cu planul ca în figura 7.22. Să se afle condiția de

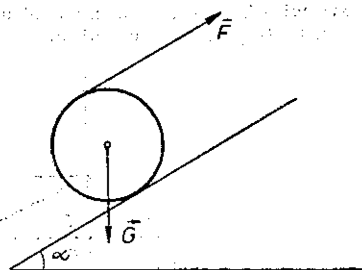


Fig. 7.22

echilibru și forța cu care trebuie să tragem de fir, știind unghiul α al planului, coeficientul de frecare la lunecare μ și greutatea cilindrului G.

R. $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2\mu$, $F = \frac{1}{2} G\sin\alpha$.

7.11. O pîlnie conică cu deschiderea 2α se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale. Între ce înălțimi $h_{1,2}$ poate sta pe suprafața pîlniei un corp mic fără să lunece, știindu-se unghiul de frecare φ?

R. $h_1 = \dfrac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$ și $h_2 = \dfrac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}$ dacă $\varphi < \alpha$.

7.12. O placă omogenă triunghiulară de greutate G stă orizontal sprijinindu-se cu vîrfurile sale pe trei reazeme. Să se afle reacțiunile reazemelor.

R. $G/3$.

7.13. Să se afle cu ajutorul teoremelor Guldin suprafața, respectiv volumul, corpului obținut prin rotirea unui arc de cerc, respectiv segment de cerc, cu unghiul la centru 2α și raza R, în jurul coardei sale.

R. $S = 4\pi R^2(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$, $V = 2\pi R^3\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha\right)$.

7.14. Un lanț greu, omogen și uniform, de lungime l și greutate G este fixat de capete în două puncte situate pe aceeași orizontală. Cunoscînd săgeata f, să se afle tensiunea la capete.

R. $T = \dfrac{l^2 + f^2}{2lf} G$.

7.15. Un lanț greu, omogen și uniform, de lungime l, este atîrnat cu capetele sale de o tijă fixă orizontală prin intermediul a două inele mici, care pot luneca pe tijă cu unghiul de frecare φ. Să se afle distanța maximă dintre inele pentru care lanțul este în echilibru.

R. $d = l \operatorname{tg}\varphi \ln\operatorname{ctg}\varphi/2$.

CAPITOLUL 8

GRAVITAȚIA

Legea atracției universale a fost descoperită de Isaac Newton și publicată în cartea sa „Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1687), unde este aplicată la mișcarea sistemului solar.

8.1. LEGILE LUI KEPLER

Pe baza observațiilor astronomice de mare precizie ale lui Tycho Brahe (1546—1601), după calcule de aproape două decenii, *Johann Kepler* (1571—1630) a stabilit următoarele trei legi de mișcare a planetelor în jurul Soarelui (primele două în 1609, a treia în 1619):

I. *Planetele se mișcă în jurul Soarelui pe traiectorii* **eliptice**, *Soarele aflîndu-se în unul din* **focarele** *elipsei.*

II. **Legea ariilor.** *Razele vectoare, duse de la Soare la planetă, mătură arii egale în timpuri egale, adică viteza areolară sau sectorială este constantă* (fig. 8.1).

III. *Pătratele timpurilor de revoluție a planetelor în jurul Soarelui sînt proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale elipselor:*

$$T^2 = \text{const}\cdot a^3. \tag{8.1}$$

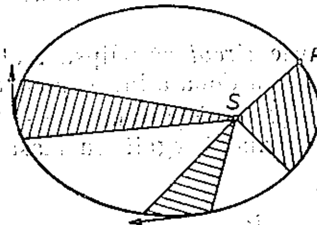


Fig. 8.1

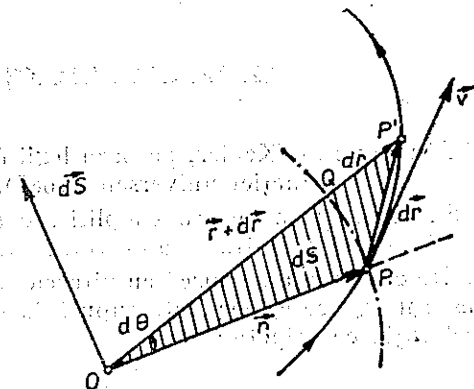


Fig. 8.2

Știind că aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul a două laturi prin sinusul unghiului cuprins, să calculăm aria elementară dS măturată de raza vectoare în timpul dt (fig. 8.2):

$$\Delta S \cong \frac{1}{2} r(r + \Delta r)\sin\Delta\theta,$$

de unde la limită (a nu se confunda $\mathrm{d}r = QP'$ cu $|\mathrm{d}\vec{r}| = PP'$):

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta \text{ sau } \mathrm{d}S = \frac{1}{2} |\vec{r}|\,|\mathrm{d}\vec{r}| \sin(\vec{r}, \mathrm{d}\vec{r}). \tag{8.2}$$

Ultima expresie ne arată că aria elementară se poate reprezenta printr-un vector perpendicular pe arie:

$$\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}. \tag{8.3}$$

Viteza areolară este prin definiție variația ariei măturate de raza vectoare a mobilului, raportată la unitatea de timp:

$$\vec{\Omega} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m}\vec{L}, \tag{8.4}$$

de unde pentru mișcarea plană ($\vec{\Omega}$ și $\mathrm{d}\vec{S}$ păstrează direcție fixă):

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}, \; L = 2m\Omega = mr^2\dot{\theta} = I\dot{\theta}. \tag{8.5}$$

Legea a II-a a lui Kepler afirmă constanța vitezei areolare a planetelor față de Soare. Prima și a doua lege afirmă constanța vectorului viteză areolară $\vec{\Omega}$ sau a *vectorului moment cinetic* $\vec{L}$ al planetei față de Soare. Vom prefera să folosim momentul cinetic, care este o noțiune mai profundă decît viteza areolară (așa cum este impulsul față de viteză, datorită legilor de conservare).

8.2. LEGEA ATRACȚIEI UNIVERSALE

Din legile lui Kepler, pe baza legii fundamentale a dinamicii, Newton a dedus legea atracției universale (1687).

Să considerăm pentru simplificare o traiectorie *circulară* (elipsa reală a planetelor diferă puțin de un cerc). Atunci din legea a doua a lui Kepler (8.5) rezultă că planeta se mișcă cu vitezele unghiulară ($\dot{\theta} = \omega$) și liniară ($v = \dot{\theta}R$) constante pe cerc, deci este supusă la o forță centripetă, egală cu masa ori accelerația centripetă:

$$F = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = 4\pi^2 m \frac{R}{T^2}. \tag{8.6}$$

Conform legii a III-a a lui Kepler $T^2 = kR^3 (k = \text{const})$, deci (8.6), devine

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{R^2} \sim \frac{m}{R^2}, \tag{8.7}$$

unde constanta k este aceeași pentru toate planetele. Prin urmare, forța de atracție exercitată de Soare asupra planetei este direct proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu pătratul distanței dintre planetă și Soare. Conform principiului III al acțiunii și reacțiunii, o forță egală în modul și de sens opus se exercită asupra Soarelui din partea planetei, deci trebuie să fie proporțională cu masa Soarelui. Aceleași legi ale lui Kepler guvernează și mișcarea sateliților planetelor, de exemplu, sateliții lui Jupiter și Saturn. Introducînd o nouă constantă, astfel ca să apară masa astrului central, obținem *legea atracției universale* a lui Newton:

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2} \text{ sau } F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \; (\gamma = \text{const}), \tag{8.8}$$

unde semnul minus indică caracterul atractiv al forței.

Două corpuri punctiforme se atrag între ele cu o forță direct proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

Constanta gravitațională γ are dimensiunile:

$$[\gamma] = \frac{[F][R^2]}{[m]^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}, = \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2 = \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \text{ în SI}. \tag{8.9}$$

După ultimele măsurări experimentale:

$$\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2. \tag{8.10}$$

Două mase punctiforme egale fiecare cu unitatea (1 kg), situate la distanța unitate (1 m) se atrag cu o forță egală numeric cu constanta gravitațională $\gamma(6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N).

În cazul a două mase oarecare, forța de atracție este rezultanta *vectorială* a forțelor de atracție dintre particulele care compun corpurile.

Reciproc din legea atracției universale, pentru orbite planetare circulare, rezultă ușor celelalte două legi ale lui Kepler:

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2} = -m\omega^2 R \to \omega = \dot{\theta} = \text{const } (R = \text{const}), \; \Omega = \text{const},$$

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \gamma \frac{M}{R^3}, \; T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} R^3 = kR^3. \tag{8.11}$$

Forțele gravitaționale devin importante numai dacă unul din parteneri este de dimensiuni astronomice (piatră—Pămînt) sau între corpuri cerești.

Observație. Trecerea de la observațiile empirice ale lui Tycho Brahe la legile lui Kepler și apoi la legea atracției universale (și mai apoi la teoria relativistă a gravitației) reflectă *dezvoltarea dialectică a cunoașterii.*

Succesiunea *istorică* a cunoașterii luată în momentele sale principale, curățată de exterior și accidental, trebuie să reflecte succesiunea *logică* a cunoașterii. Ea corespunde trecerii de la singular prin particular la general, corespunde înaintării cunoașterii de la fenomen la esență, de la esența de ordinul I la esența de ordinul II ș.a.m.d. în profunzime.

Este foarte important şi util să culegi informaţii asupra obiectului prin experiment, să construieşti grafice şi tabele de constante privind comportarea şi proprietăţile obiectului. Dar o simplă colecţie de date, oricît de completă şi bogată ar fi ea, nu este încă *ştiinţă*. Pentru procesul cunoaşterii este mult mai important *de a ridica datele empirice la forma generală de determinări cantitative pe planul necesităţii şi generalităţii, ca momente ale unei legi.* Mai mult, *înseşi legile trebuie demonstrate*, deduse din calităţi sau din concepte primare cum sînt spaţiul şi timpul. Calitatea trebuie să treacă în cantitate, care nu este altceva decît calitatea depăşită.

Experienţa pune întrebarea: cum? şi este descriptivă. Teoria pune întrebarea *de ce?* şi este demonstrativă. Teoria trebuie să arate necesitatea legilor ei şi să le *deducă*, deoarece sarcina unei teorii este de a demonstra existenţa şi determinaţiile obiectelor ei.

Iată ce spune Hegel (Ştiinţa logicii, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1966, pag. 329):

„Este un mare merit să cunoşti numerele empirice ale naturii, de exemplu distanţele dintre planete; dar este un merit nemărginit mai mare să faci să dispară cîtimile empirice, ridicîndu-le la o *formă generală* de determinaţii cantitative, astfel încît ele să devină momente ale unei *legi* sau măsuri: merite nemuritoare şi-au cîştigat, de exemplu, *Galilei* cu privire la cădere şi *Kepler* cu privire la mişcarea corpurilor cereşti. Aceştia au *demonstrat* legile descoperite de ei, arătînd că acestora le corespunde întregul cuprins al particularităţilor furnizate de percepţie. Trebuie însă să cerem o *demonstraţie* şi mai înaltă a acestor legi pentru ca determinaţiile lor cantitative să fie cunoscute din calităţile sau conceptele determinate la care ele se referă (cum sînt timpul şi spaţiul)".

Înţelegerea deplină, în esenţă, a legilor Kepler, poate fi atinsă numai pe baza cunoaşterii legii mai profunde a atracţiei universale şi a acesteia pe baza teoriei relativiste a gravitaţiei (Einstein) şi aşa mai departe. Numai cunoscînd structurile mai complexe, superioare, putem înţelege deplin, în esenţă, structurile simple, inferioare (de exemplu, în biologie, cunoscînd organismul uman, putem înţelege mai bine organismul maimuţei şi al altor animale, şi nu invers).

Nu ne putem opri la formularea legii atracţiei universale, trebuie să o deducem din concepte mai profunde (de exemplu, legea $1/r^2$ a forţei şi caracterul tridimensional al spaţiului etc.).

8.3. MĂSURAREA CONSTANTEI GRAVITAŢIONALE

Pentru prima dată constanta γ a fost determinată experimental de *Cavendish* în 1798 cu ajutorul unei balanţe de torsiune (fig. 8.3). Două sfere de plumb grele M (158 kg) sînt suspendate pe o bară care se poate roti. Alte două bile mici de plumb m (0,73 kg) sînt fixate la capetele unei tije suspendate pe un fir elastic. Apropiind sferele M de bilele m, se constată o răsucire a firului lor de suspensie. La echilibru, momentul forţelor elastice $C\alpha$ este egal cu momentul forţelor de atracţie Fl:

$$C\alpha = Fl = \gamma \frac{mM}{r^2} l, \quad \gamma = \frac{r^2 C\alpha}{mMl}. \tag{8.12}$$

Cunoscînd M, m, l, C şi măsurînd distanţa r şi unghiul de răsucire α, se poate calcula γ.

O altă metodă mai precisă este ilustrată de figura 8.4 (Richartz 1898, după o idee a lui Jolly). Cele două bile sînt în prealabil echilibrate pe o balanţă, apoi aşezate ca în figură. Echilibrul se strică, deoarece bila superioară este atrasă în jos de masa de plumb (100 t), iar bila inferioară în sus (influenţa cîmpului gravitaţional terestru a fost eliminată prin echilibrarea iniţială).

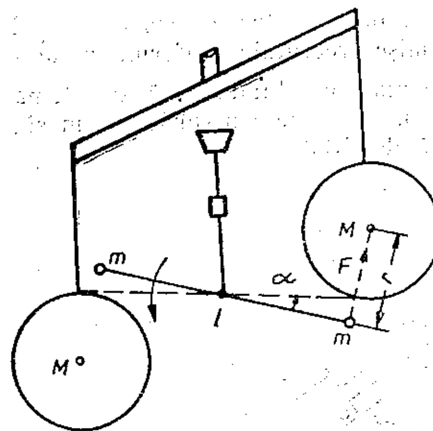


Fig. 8.3

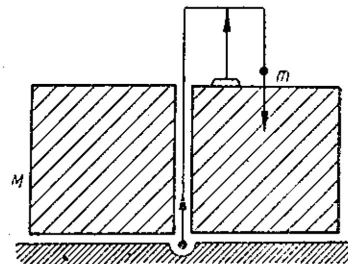


Fig. 8.4

Observaţie. După publicarea legii atracţiei universale (1687) a trebuit să treacă *peste un secol* pentru ca să se măsoare experimental constanta atracţiei universale (Cavendish 1798) şi apoi *încă un secol* pentru ca să o măsoare Richartz în 1898. Astăzi trec doar cîţiva ani sau chiar luni de la publicarea unor descoperiri şi aplicarea lor în fizică sau tehnologie.

În adînca antichitate preistorică puteau trece *milenii* fără să se descopere practic nimic. Civilizaţiile antice, de exemplu sumero-akkadiene, egipteană, chineză, indiană, au necesitat mii de ani pentru a ajunge la gradul lor de dezvoltare cunoscut. Înflorirea civilizaţiei Greciei antice a cuprins cîteva sute de ani. În sfîrşit, epoca Renaşterii marchează o dezvoltare impetuoasă a ştiinţei, artei şi forţelor de producţie.

Putem spune că dezvoltarea ştiinţei şi tehnologiei în general urmează o lege (curbă) *exponenţială* (dublare la intervale egale de timp).

8.4. PROBLEMA A DOUĂ CORPURI

Cunoscînd legea interacţiunii dintre două particule de mase $m_{1,2}$ şi condiţiile iniţiale (poziţiile şi vitezele lor la un moment dat), să se afle mişcarea celor două particule.

În raport cu un referenţial inerţial, cele două corpuri interacţionează, conform principiului reciprocităţii forţelor, cu forţele $\vec{F}$, $-\vec{F}$, de atracţie sau de respingere (fig. 8.5):

$$m_1\dot{\vec{v}}_1 = \vec{F}, \quad m_2\dot{\vec{v}}_2 = -\vec{F}, \tag{8.13}$$

$$m_1\dot{\vec{v}}_1 + m_2\dot{\vec{v}}_2 = 0, \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{const.} \tag{8.14}$$

Ultima ecuaţie reprezintă conservarea impulsului total al sistemului din cele două particule, presupus izolat. Vectorul de poziţie $\vec{r}_{cm}$ şi viteza $\vec{v}_{cm}$ ale centrului de masă sînt:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_{cm} = \dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.15}$$

În virtutea lui (8.14) rezultă $\vec{v}_{cm} = \text{const}$, adică centrul de masă (CM) al celor două particule este în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform, întrucît forţele interne $(\vec{F}, -\vec{F})$ nu pot influenţa mişcarea centrului de masă. Problema s-a redus astfel la mişcarea celor două particule faţă de centrul lor de masă, care se mişcă rectiliniu uniform, adică faţă de SCM.

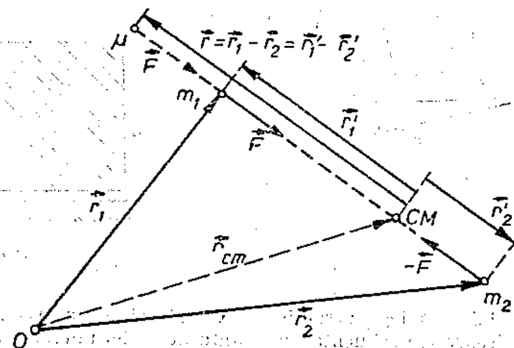


Fig. 8.5

Introducem poziţia, viteza şi acceleraţia, relative, ale particulei m_1 faţă de particula m_2 considerînd un SC cu originea în m_2 şi în *translaţie* faţă de SL:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_1 - \dot{\vec{v}}_2 \tag{8.16}$$

(în expresia vitezei relative şi a acceleraţiei relative am ţinut seama de mişcarea prin *translaţie* a SC legat de m_2, altfel ar apărea termeni suplimentari, de exemplu acceleraţia Coriolis). Atunci,

$$m_2 m_1 \dot{\vec{v}}_1 = m_2 \vec{F}, \quad m_1 m_2 \dot{\vec{v}}_2 = -m_1 \vec{F},$$

$$m_1 m_2 (\dot{\vec{v}}_1 - \dot{\vec{v}}_2) = (m_1 + m_2)\vec{F},$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{v}} = \vec{F} \text{ sau } \mu\vec{a} = \mu\dot{\vec{v}} = \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{8.17}$$

unde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ este *masa redusă* a celor două particule. Prin urmare, în SC legat de m_2 şi mişcat prin *translaţie* faţă de SL, mişcarea este descrisă de vectorul relativ $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ al unei particule *fictive de masă redusă* μ supusă la forţa $\vec{F}$ trecînd prin m_2. Problema s-a redus la mişcarea unei particule în *cîmp central*, adică într-un cîmp de forţe care trec permanent printr-un punct dat — centrul forţelor (în cazul nostru prin m_2 = originea SC considerat).

Putem foarte bine considera mişcarea particulei μ în SCM, cu vectorul de poziţie $\vec{r}$ şi legea forţei $\vec{F}$ (fig. 8.5).

Cunoscînd $\vec{r} = \vec{r}(t)$, obţinem imediat mişcarea fiecărei particule faţă de centrul de masă:

$$0 = m\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2', \quad \vec{r} = \vec{r}_1' - \vec{r}_2',$$

de unde

$$\vec{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}, \tag{8.18}$$

adică $\vec{r}_{1,2}'$ sînt proporţionale cu $\vec{r}(t)$, deci *traiectoria fiecărei particule faţă de* CM *este* **asemenea** *cu traiectoria particulei fictive* μ *faţă de* m_2. *Traiectoriile celor două particule faţă de* CM *sînt* **asemenea** *şi între ele, dar particulele sînt situate mereu diametral opus faţă de* CM (fig. 8.6).

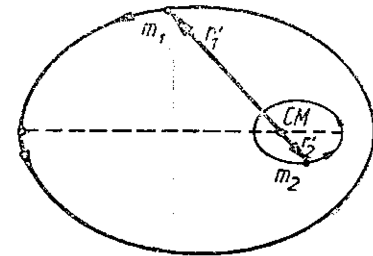


Fig. 8.6

Dacă $m_2 \gg m_1$, atunci

$$\mu = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} \approx m_1, \; \vec{r}_{cm} \approx \vec{r}_2, \tag{8.19}$$

adică într-o primă aproximaţie centrul de masă coincide cu m_2 (Soarele) în jurul căreia are loc mişcarea particulei $\mu \approx m_1$ (planetă), supusă la o forţă de atracţie (sau respingere) exercitată de m_2.

În raport cu SCM, *ambele* corpuri se mişcă în jurul CM comun, descriind traiectorii *asemenea*, conform lui (8.18) (fig. 8.6).

8.5. MIŞCAREA ÎN CÎMP CENTRAL

8.5.1. VITEZA ŞI ACCELERAŢIA

Fie o mişcare *plană*. Alegînd un SC polare în plan (fig. 8.7), viteza se poate descompune într-o componentă radială v_r şi o componentă transversală v_θ (perpendiculară pe raza vectoare):

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dr + \vec{j}r\,d\theta, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\frac{dr}{dt} + \vec{j}r\frac{d\theta}{dt}, \tag{8.20}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{i} + v_\theta\vec{j}, \quad v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta},$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{i} + r\dot{\theta}\vec{j}. \tag{8.21}$$

Derivatele versorilor sînt, conform figurii 8.7 (derivata unui versor este totdeauna perpendiculară pe versor, diferenţiala unui versor fiind egală în modul cu unghiul de rotaţie a versorului: $|d\vec{i}| = d\theta = |d\vec{j}|$):

$$\dot{\vec{i}} = \dot{\theta}\vec{j}, \quad \dot{\vec{j}} = -\dot{\theta}\vec{i} \tag{8.22}$$

(caz particular al formulelor lui Poisson cu $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k}$, $\vec{k} = \text{const}$), astfel încît accelerația este :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \ddot{r}\vec{i} + \dot{r}\dot{\vec{i}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{j} + r\ddot{\theta}\vec{j} + r\dot{\theta}\dot{\vec{j}} =$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{j} = a_r\vec{i} + a_\theta\vec{j}, \qquad (8.23)$$

unde a_r este accelerația radială și a_θ accelerația transversală.

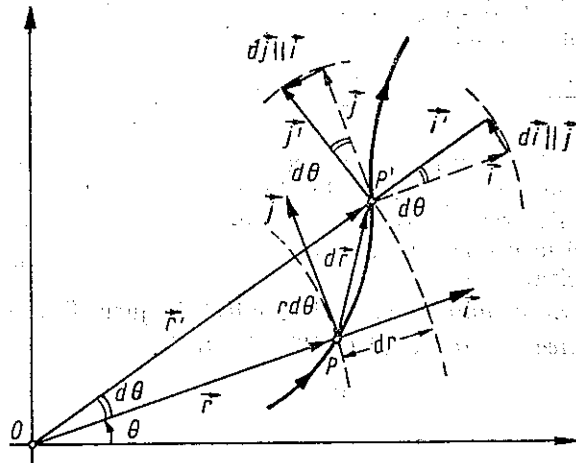


Fig. 8.7

Observăm că accelerația transversală a_θ poate fi scrisă astfel :

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{r}(r^2\dot{\theta})^{\cdot} = \frac{2}{r}\dot{\Omega}. \qquad (8.24)$$

Legea fundamentală a dinamicii se scrie pe componente :

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow ma_r = F_r,\ ma_\theta = F_\theta,$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r,\quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta. \qquad (8.25)$$

8.5.2. INTEGRALA MOMENTULUI CINETIC

În cazul cîmpului *central* de forțe alegem polul în centrul forțelor, atunci $F_\theta = 0$, $F_r = F$, deci și accelerația este centrală, adică $a_\theta = 0$. Aceasta rezultă și din conservarea momentului cinetic față de centrul forțelor. În adevăr,

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const} = \vec{r} \times \vec{p} = 2m\vec{\Omega},$$

(I) $$L = 2m\Omega = mr^2\dot{\theta} = \text{const} \qquad (8.26)$$
(integrala momentului cinetic sau a ariilor)

adică mișcarea este plană și viteza areolară este constantă (legea a doua a lui Kepler) ;

$$\dot{\Omega} = r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{2}r^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}ra_\theta = 0$$

sau

$$\dot{L} = mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = mra_\theta = 0 \rightarrow a_\theta = 0. \qquad (8.27)$$

Observăm că accelerația se poate pune sub următoarea formă :

$$a = a_r = -\frac{L^2}{m^2r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathrm{d}^2(1/r)}{\mathrm{d}\theta^2}\right), \text{ (J. Binet).} \qquad (8.28)$$

8.5.3. INTEGRALA ENERGIEI

Ecuațiile mișcării se reduc la ecuația :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \quad \text{sau } m\ddot{r} = F + F', \qquad (8.29)$$

unde F' este forța centrifugă :

$$F' = mr\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}r},\quad U' = \frac{L^2}{2mr^2}, \qquad (8.30)$$

unde $U' = L^2/2mr^2$ este energia (potențială) centrifugă. Introducînd forța $F'(r)$ și energia potențială corespunzătoare $U'(r)$, problema se reduce la o problemă *unidimensională* în raport cu r (partea radială a mișcării, în care se reflectă partea unghiulară a mișcării prin forța centrifugă F'), dacă forța F este funcție numai de r.

Energia cinetică este, conform lui (8.29) și (8.26) :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U'. \qquad (8.31)$$

Înmulțind ecuația mișcării (8.29) cu $\mathrm{d}r$ sau aplicînd direct teorema energiei cinetice, obținem :

$$\mathrm{d}E_c = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}\right) = F\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}W. \qquad (8.32)$$

Să presupunem acum că forțele sînt *conservative*, atunci

$$\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = F\mathrm{d}r = -\mathrm{d}U,\quad U(r) = -\int_\infty^r F\,\mathrm{d}r,$$

$$\mathrm{d}(E_c + U) = 0,\quad E_c + U = E = \text{const}, \qquad (8.33)$$

(II) $$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U = E = \text{const} \qquad (8.34)$$
(integrala energiei)

Introducem derivata lui r în raport cu θ:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}, \quad d\theta = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\dot{r}}. \tag{8.35}$$

Atunci din (8.34—35) rezultă:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E-U) - \frac{L^2}{m^2r^2},$$

$$d\theta = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\dot{r}} = \frac{L\,dr}{r^2\sqrt{2m(E-U)-L^2/r^2}} =$$

$$= -\frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2m(E-U)-L^2/r^2}} = -\frac{d(L/r)}{\sqrt{2m(E-U-U')}}, \tag{8.36}$$

unde

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} F\,dr = \int_{r}^{\infty} F\,dr \tag{8.37}$$

este energia potenţială în cîmpul central de forţe.

8.6. PROBLEMA LUI KEPLER

Să presupunem că *forţele sînt atractive şi invers proporţionale cu pătratul distanţei*. Acesta este cazul atracţiei gravitaţionale sau al atracţiei electrostatice (legea lui Coulomb):

$$F = -\frac{\alpha}{r^2}, \ (\alpha > 0), \quad U = \int_r^{\infty} F\,dr = \frac{\alpha}{r}\Big|_r^{\infty} = -\frac{\alpha}{r} \tag{8.38}$$

În cazul gravitaţional $\alpha = \gamma mM$, iar în cazul electrostatic $\alpha = -qQ/4\pi\varepsilon$.

Conform § 8.4, problema celor două corpuri se reduce la problema mişcării unei particule de masă redusă μ în cîmpul central (8.38), deci la problema unidimensională (partea „radială" a mişcării) cu energia potenţială (fig. 8.8):

$$U + U' = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \tag{8.39}$$

Ecuaţia (8.36) devine:

$$d\theta = \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}}} = \frac{-d\left(\frac{L}{r} - \frac{\mu\alpha}{L}\right)}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^2} - \left(\frac{L}{r} - \frac{\mu\alpha}{L}\right)^2}},$$

$$\theta = \arccos\frac{\frac{L}{r} - \frac{\mu\alpha}{L}}{\sqrt{2\mu E + \mu^2\alpha^2/L^2}} + \theta_0. \tag{8.40}$$

Alegînd originea de măsură a unghiului θ astfel încît constanta de integrare $\theta_0 = 0$ şi introducînd notaţiile

$$p = L^2/\mu\alpha, \quad e = \sqrt{1 + 2EL^2/\mu\alpha^2} = \sqrt{1 + 2Ep/\alpha}, \tag{8.41}$$

obţinem ecuaţia traiectoriei în coordonate polare:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \tag{8.42}$$

Aceasta este ecuaţia unei *conice* (cu focarul în origine) cu parametrul $p = b^2/a$ şi excentricitatea $e = c/a$. Dacă $e < 1$ avem elipsă, $e > 1$ hiperbolă, $e = 1$ parabolă. Pentru $\theta = 0$, r este minim (fig. 8.9). Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = p$.

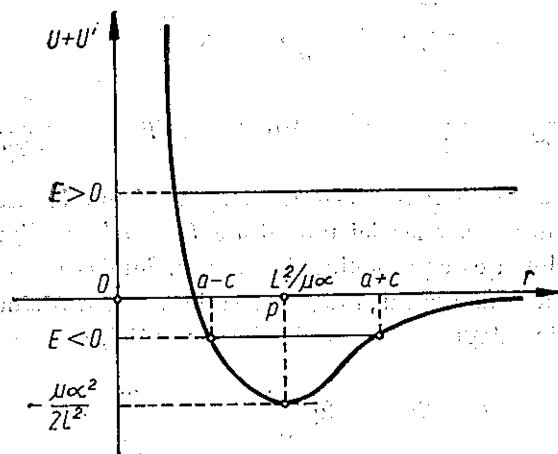


Fig. 8.8

Ecuaţia conicei (8.42) se obţine direct din ecuaţia lui Binet (8.28):

$$\mu a_r = -\frac{L^2}{\mu r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}\right) = F = -\frac{\alpha}{r^2}, \tag{8.43}$$

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu\alpha}{L^2}; \quad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2}\right) = 0.$$

Dar aceasta este o ecuaţie de tipul ecuaţiei oscilatorului armonic $(y'' + a^2 y = 0)$ şi are soluţia

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2} = A\cos(\theta - \theta_0).$$

Alegînd $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$ va corespunde la r minim şi punînd constanta A sub forma $A = e\frac{\mu\alpha}{L^2} = \frac{e}{p}$ regăsim ecuaţia conicei (8.42).

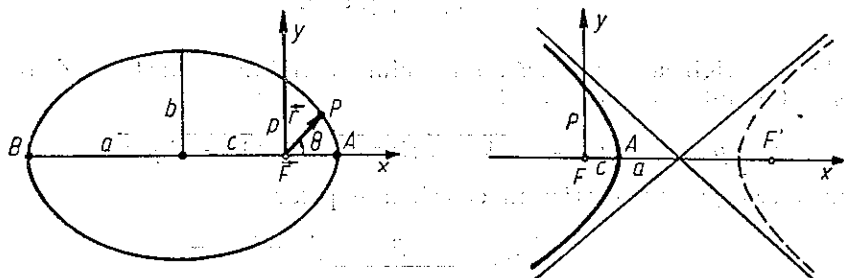


Fig. 8.9

a) Pentru $E < 0$ rezultă $e < 1$, deci traiectoria este *eliptică* şi semiaxele sînt

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{8.44}$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\alpha}{2E}, \quad (E < 0), \quad b = \sqrt{ap} = \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}}. \tag{8.45}$$

Cazul $E < 0$ (dar $E > E_{min} = -\mu\alpha^2/2L^2$) corespunde stărilor *legate* (în „groapa de potenţial" a energiei potenţiale $U + U'$ din figura 8.8). Pentru mişcarea planetelor A este periheliu, B — afeliu. Semiaxa mare depinde numai de energie, pe cînd semiaxa mică depinde şi de momentul cinetic.

Din (8.26) prin integrare pe o perioadă a rotaţiei, obţinem perioada T:

$$L = 2\mu\Omega = 2\mu\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}t = \frac{2\mu}{L}\mathrm{d}S,$$

$$T = \frac{2\mu}{L}S = \frac{2\mu\,\pi a b}{L} = \pi\alpha\sqrt{\frac{\mu}{-2E^3}}, \tag{8.46}$$

$$T^2 = -\frac{\pi^2\alpha^2\mu}{2E^3} = \frac{4\pi^2\mu a^3}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{\alpha}\mu a^3, \tag{8.47}$$

adică *pătratul perioadei de revoluţie este proporţional cu cubul semiaxei mari a elipsei* (legea a III-a a lui Kepler).

b) Pentru [illegible] cula vine de la infinit cu viteză nenulă. Pentru $E = 0$, rezultă $e = 1$, traiectoria este parabolică şi particula are la infinit viteză nulă.

Cazul $E \geq 0$ corespunde stărilor *nelegate* (în cazul electrostatic al atomului — stărilor ionizate).

În cazul cîmpului *gravitaţional*, traiectoriile eliptice corespund planetelor sau sateliţilor, iar traiectoriile hiperbolice corespund anumitor comete, care nu aparţin sistemului solar.

Am obţinut mai înainte legile I şi II ale lui Kepler (valabile pentru orice cîmp central). Ecuaţia (8.47) ne dă legea a III-a a lui Kepler:

$$\alpha = \gamma m M\,; \; T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma}\frac{1}{m + M}a^3 \approx \frac{4\pi^2}{\gamma}\frac{1}{M}\cdot a^3 = \mathrm{const}\cdot a^3. \tag{8.48}$$

Prin urmare, legea a III-a a lui Kepler (8.1) nu este riguroasă (constanta depinde de masa planetei).

8.7. CÎMPUL GRAVITAŢIONAL ŞI POTENŢIALUL GRAVITAŢIONAL

Interacţiunea gravitaţională a două corpuri se realizează prin intermediul *cîmpului* gravitaţional. Fiecare corp „creează" în jurul său un cîmp gravitaţional şi de asemenea suferă acţiunea cîmpului gravitaţional „creat" de alte corpuri. Cîmpul gravitaţional reprezintă manifestarea unei stări deosebite a mediului sau a proprietăţilor deosebite ale spaţiului şi timpului.

8.7.1. CÎMPUL GRAVITAŢIONAL

Intensitatea cîmpului gravitaţional se defineşte prin raportul dintre forţa $\vec{F}$ exercitată asupra unei particule punctiforme de „probă" şi masa acesteia m:

$$\vec{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{\Gamma}. \tag{8.49}$$

Definiţia este analogă cîmpului electrostatic ($\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q$), m jucînd rolul sarcinii gravitaţionale (masa gravitaţională sau grea sau, încă, masa gravifică). Conform legii fundamentale a dinamicii: $\vec{F} = m\vec{a}$, unde m este masă inertă, dar în virtutea egalităţii dintre masa inertă şi masa grea, rezultă că o particulă m supusă *numai* cîmpului gravitaţional $\vec{\Gamma}$ va căpăta o acceleraţie egală chiar cu $\vec{\Gamma}$, independentă de masa sa m, de natura substanţei, de dimensiunile sau de forma sa:

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma} = m\vec{a}, \quad \vec{a} = \vec{\Gamma}. \tag{8.50}$$

În particular rezultă de aici legea căderii corpurilor în vid ($\vec{\Gamma} = \vec{g}$).

Cîmpul creat de o masă punctiformă rezultă din legea atracţiei universale :

$$\vec{\Gamma}=-\gamma\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},\quad \Gamma=-\gamma\frac{M}{r^2}, \tag{8.51}$$

unde **semnul minus** indică caracterul *atractiv* al cîmpului.

Energia potenţială a unei particule m în cîmpul gravitaţional al particulei M este

$$\mathrm{d}U=-\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r},\quad U=-\int_{\infty}^{r}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}=-\gamma\frac{mM}{r}; \tag{8.52}$$

cîmpul gravitaţional este deci un cîmp *conservativ*. Această energie este în **acelaşi timp şi** energia potenţială a celeilalte particule M în cîmpul lui m, deci este **energia de** *interacţiune* a celor două particule : proporţională cu produsul **maselor lor şi** invers proporţională cu *distanţa* dintre ele.

8.7.2. POTENŢIALUL GRAVITAŢIONAL

Potenţialul cîmpului se defineşte prin energia potenţială a particulei de **probă raportată** la masa acesteia sau altfel prin lucrul mecanic efectuat de **forţele cîmpului** pentru a deplasa particula m la infinit, împărţit la masa **acesteia.**

În cazul unei mase *punctiforme* M :

$$\mathrm{d}V\overset{\mathrm{def}}{=}-\vec{\Gamma}\,\mathrm{d}\vec{r},\quad V=\frac{U}{m}=-\gamma\frac{M}{r};\quad U=mV \tag{8.53}$$

(diferenţa de potenţial între două puncte este minus „lucrul mecanic" al cîmpului între aceste puncte). Liniile de cîmp în cazul (8.53) sînt radiale, iar suprafeţele echipotenţiale sînt sferice (fig. 8.10) (liniile de cîmp totdeauna se termină pe particule).

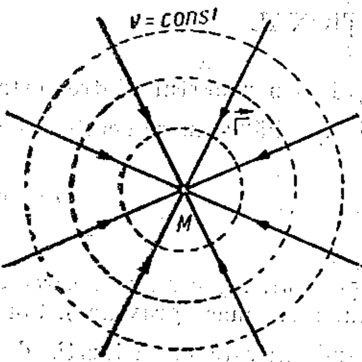


Fig. 8.10

8.7.3. ENERGIA DE INTERACŢIUNE

Energia de interacţiune a două particule m_1, m_2 se scrie acum :

$$U=-\gamma\frac{m_1m_2}{r}=\frac{1}{2}m_1\left(-\gamma\frac{m_2}{r}\right)+\frac{1}{2}m_2\left(-\gamma\frac{m_1}{r}\right)=\frac{1}{2}m_1V_1+\frac{1}{2}m_2V_2$$

(unde V_1 este potenţialul gravitaţional în punctul m_1) şi pentru un sistem de **particule :**

$$U=\frac{1}{2}\sum_k m_kV_k \tag{8.54}$$

(unde V_k este potenţialul gravitaţional în punctul m_k) sau **în cazul distribuţiei** continue a masei :

$$U=\frac{1}{2}\int V\,\mathrm{d}m. \tag{8.55}$$

Energia de interacţiune a unui sistem de particule, luată **cu semn schimbat**, reprezintă *energia de legătură* a sistemului, adică energia **necesară pentru a** desface sistemul în particulele componente, îndepărtate la **infinit sau altfel,** este lucrul mecanic care trebuie efectuat împotriva forţelor **de coeziune pentru** a desface sistemul, sau, în sfîrşit, este energia degajată la **formarea sistemului** din particule libere aduse de la infinit. (Particulele libere **nu pot forma** o stare legată, decît dacă se elimină energie.) *Exemple* : energia **de legătură a unei** molecule este energia necesară pentru a desface molecula **în atomi sau ioni** (energia de disociaţie) ; energia de legătură a unui atom este **energia de ionizare** completă a acestuia ; energia de legătură a unui nucleu **este energia necesară** pentru a descompune nucleul în nucleoni (proporţională **cu defectul de** masă) ; energia de legătură a unui solid este căldura de **sublimare etc.**

8.7.4. CÎMPUL ŞI POTENŢIALUL GRAVITAŢIONAL

Dimensiunile cîmpului şi potenţialului gravitaţional sînt **următoarele :**

$$[\Gamma]=\frac{[F]}{[m]}=LT^{-2}=\mathrm{m/s^2}\ \text{în SI}, \tag{8.56}$$

ceea ce coincide cu dimensiunea acceleraţiei ;

$$[V]=\frac{[U]}{[m]}=L^2T^{-2}=\mathrm{J/kg}=\mathrm{m^2/s^2}\ \text{în SI}, \tag{8.57}$$

ceea ce coincide cu dimensiunea pătratului vitezei.

Legătura dintre cîmp şi potenţial este aceeaşi ca dintre forţă şi energia potenţială :

$$\mathrm{d}V=-\vec{\Gamma}\,\mathrm{d}\vec{r},\quad \vec{\Gamma}=-\operatorname{grad}V,$$

$$\Gamma_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\partial_xV,$$

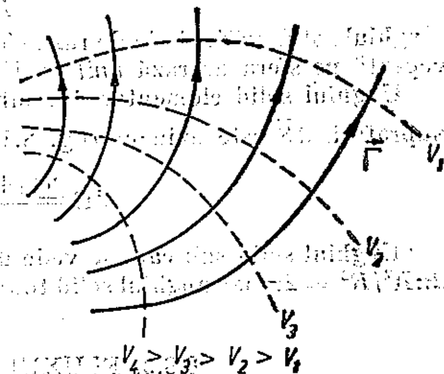


Fig. 8.11

$$\Gamma_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-\partial_yV,\quad \Gamma_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-\partial_zV. \tag{8.58}$$

Cîmpul este perpendicular pe suprafeţele echipotenţiale şi **îndreptat în sensul**

Dar aceasta este o ecuație de tipul ecuației oscilatorului armonic ($y'' + a^2 y = 0$) și are soluția

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2} = A\cos(\theta - \theta_0).$$

Alegînd $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$ va corespunde la r minim și punînd constanta A sub forma $A = e\frac{\mu\alpha}{L^2} = \frac{e}{p}$ regăsim ecuația conicei (8.42).

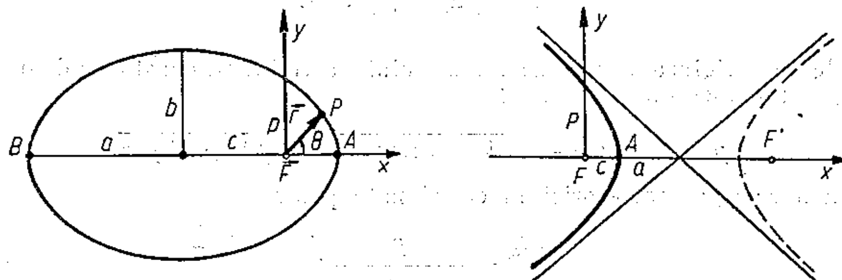


Fig. 8.9

a) Pentru $E < 0$ rezultă $e < 1$, deci traiectoria este *eliptică* și semiaxele sînt

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}, \; c = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{8.44}$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\alpha}{2E}, \quad (E < 0), \; b = \sqrt{ap} = \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}}. \tag{8.45}$$

Cazul $E < 0$ (dar $E > E_{min} = -\mu\alpha^2/2L^2$) corespunde stărilor *legate* (în „groapa de potențial" a energiei potențiale $U + U'$ din figura 8.8). Pentru mișcarea planetelor A este periheliu, B — afeliu. Semiaxa mare depinde numai de energie, pe cînd semiaxa mică depinde și de momentul cinetic.

Din (8.26) prin integrare pe o perioadă a rotației, obținem perioada T:

$$L = 2\mu\Omega = 2\mu\frac{dS}{dt}, \quad dt = \frac{2\mu}{L}dS,$$

$$T = \frac{2\mu}{L}S = \frac{2\mu\,\pi ab}{L} = \pi\alpha\sqrt{\frac{\mu}{-2E^3}}, \tag{8.46}$$

$$T^2 = -\frac{\pi^2\alpha^2\mu}{2E^3} = \frac{4\pi^2\mu a^3}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{\alpha}\mu a^3, \tag{8.47}$$

adică *pătratul perioadei de revoluție este proporțional cu cubul semiaxei mari a*

b) Pentru $E > 0$, rezultă $e > 1$, deci traiectoria este hiperbolică și particula vine de la infinit cu viteză nenulă. Pentru $E = 0$, rezultă $e = 1$, traiectoria este parabolică și particula are la infinit viteză nulă.

Cazul $E \geqslant 0$ corespunde stărilor *nelegate* (în cazul electrostatic al atomului — stărilor ionizate).

În cazul cîmpului *gravitațional*, traiectoriile eliptice corespund planetelor sau sateliților, iar traiectoriile hiperbolice corespund anumitor comete, care nu aparțin sistemului solar.

Am obținut mai înainte legile I și II ale lui Kepler (valabile pentru orice cîmp central). Ecuația (8.47) ne dă legea a III-a a lui Kepler:

$$\alpha = \gamma mM\,; \; T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma}\frac{1}{m + M}a^3 \approx \frac{4\pi^2}{\gamma}\frac{1}{M}\cdot a^3 = \text{const}\cdot a^3. \tag{8.48}$$

Prin urmare, legea a III-a a lui Kepler (8.1) nu este riguroasă (constanta depinde de masa planetei).

8.7. CÎMPUL GRAVITAȚIONAL ȘI POTENȚIALUL GRAVITAȚIONAL

Interacțiunea gravitațională a două corpuri se realizează prin intermediul *cîmpului* gravitațional. Fiecare corp „creează" în jurul său un cîmp gravitațional și de asemenea suferă acțiunea cîmpului gravitațional „creat" de alte corpuri. Cîmpul gravitațional reprezintă manifestarea unei stări deosebite a mediului sau a proprietăților deosebite ale spațiului și timpului.

8.7.1. CÎMPUL GRAVITAȚIONAL

Intensitatea cîmpului gravitațional se definește prin raportul dintre forța $\vec{F}$ exercitată asupra unei particule punctiforme de „probă" și masa acesteia m:

$$\vec{\Gamma} \overset{\text{def}}{=} \frac{\vec{F}}{m}, \; \vec{F} = m\vec{\Gamma}. \tag{8.49}$$

Definiția este analogă cîmpului electrostatic ($\vec{E} \overset{\text{def}}{=} \vec{F}/q$), m jucînd rolul sarcinii gravitaționale (masa gravitațională sau grea sau, încă, masa gravifică). Conform legii fundamentale a dinamicii: $\vec{F} = m\vec{a}$, unde m este masa inertă, dar în virtutea egalității dintre masa inertă și masa grea, rezultă că o particulă m supusă *numai* cîmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$ va căpăta o accelerație egală chiar cu $\vec{\Gamma}$, independentă de masa sa m, de natura substanței, de dimensiunile sau de forma sa:

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma} = m\vec{a}, \quad \vec{a} = \vec{\Gamma}. \tag{8.50}$$

În particular rezultă de aici legea căderii corpurilor în vid ($\vec{\Gamma} = \vec{g}$).

8.8. FLUXUL CÎMPULUI GRAVITAŢIONAL

8.8.1. UNGHI SOLID

Un element de suprafaţă dS se reprezintă printr-un vector perpendicular pe suprafaţă şi de modul egal cu dS (fig. 8.12).

Fluxul $d\Phi$ al cîmpului $\vec{\Gamma}$ prin acest element $d\vec{S}$ se defineşte prin produsul scalar :

$$d\Phi \overset{def}{=} \vec{\Gamma}\, d\vec{S} = \Gamma\, dS \cos\alpha = \Gamma_n\, dS = \Gamma (dS)_n, \qquad (8.59)$$

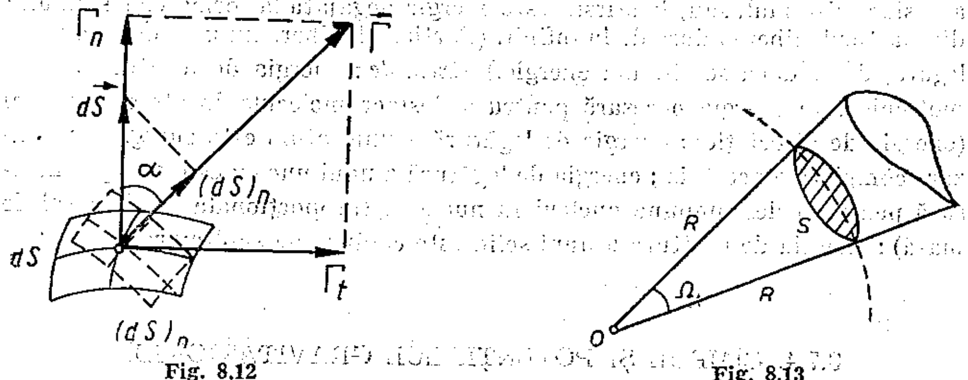


Fig. 8.12 Fig. 8.13

adică la flux nu contribuie decît componenta *normală* Γ_n a cîmpului sau proiecţia ariei dS pe planul normal la cîmp.

Fie un con oarecare cu vîrful în O (fig. 8.13).

Se numeşte *unghi solid* sau spaţial, definit de un con, raportul dintre aria S interceptată de con pe o sferă cu centrul în vîrful conului şi pătratul razei sferei :

$$\Omega \overset{def}{=} \frac{S}{R^2}, \quad S = R^2\Omega. \qquad (8.60)$$

Unghiul solid nu depinde de raza sferei alese şi coincide numeric cu aria interceptată pe sfera de rază *unitate*. Unghiul solid se măsoară în steradiani (sr).

Unghiul solid elementar $d\Omega$ sub care se vede din origine un element de suprafaţă $d\vec{S}$ este evident (fig. 8.14) :

$$d\Omega \overset{def}{=} \frac{(dS)_n}{r^2} = \frac{d\vec{S}}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (8.61)$$

Unghiul solid sub care se vede dintr-un punct un semispaţiu este evident $2\pi R^2/R^2 = 2\pi$, iar unghiul solid total din jurul unui punct este $4\pi R^2/R^2 = 4\pi$.

8.8.2. FLUXUL GRAVITAŢIONAL

Să calculăm fluxul *total* al cîmpului creat de o sarcină punctiformă m. Înconjurăm particula cu o suprafaţă închisă oarecare şi considerăm un element de suprafaţă dS cu normala orientată spre *exterior*. Fluxul elementar prin acest element va fi (fig. 8.14) :

$$d\Phi = \vec{\Gamma}\, d\vec{S} = -\gamma \frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = -\gamma\frac{m}{r^2}(dS)_n = -\gamma m\, d\Omega, \qquad (8.62)$$

unde

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{(dS)_n}{r^2},$$

adică este proporţional cu masa particulei şi cu *unghiul solid* sub care se vede acel element de suprafaţă din locul unde se află particula m. Integrînd pe toată suprafaţa, rezultă :

$$\Phi = \oint \vec{\Gamma}\, d\vec{S} = -\gamma m \oint d\Omega = -4\pi\gamma m. \qquad (8.63)$$

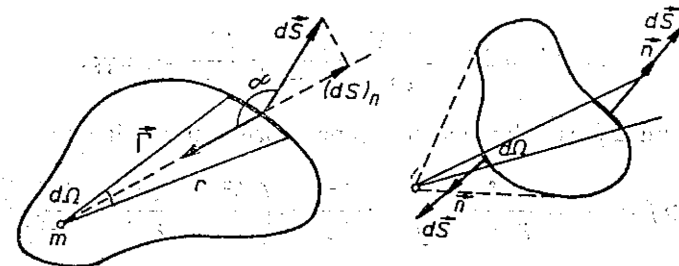


Fig. 8.14

Semnul minus arată că fluxul este îndreptat spre interiorul sferei (particulele m sînt „izvoare negative" de flux : liniile de cîmp se termină pe ele).

Dacă particula ar fi în exteriorul suprafeţei închise, atunci fluxul total prin acea suprafaţă închisă ar fi nul, deoarece pentru fiecare element de suprafaţă există un al doilea situat în acelaşi unghi solid elementar, astfel încît cele două fluxuri elementare sînt egale în modul şi de sensuri opuse. În interiorul suprafeţei închise nu avem izvoare şi toate liniile de cîmp care intră, ies.

Dacă avem mai multe particule, atunci însumînd contribuţiile lor rezultă (*teorema lui Gauss*) :

$$\Phi = \oint \vec{\Gamma}\, d\vec{S} = -4\pi\gamma \sum_k m_k = -4\pi\gamma M, \qquad (8.64)$$

unde

$$M = \sum_k m_k = \int_V \rho\, dV, \; (dm = \rho\, dV), \qquad (8.65)$$

este masa particulelor din *interiorul* suprafeţei închise considerate.

8.8.3. ECUAŢIA LUI POISSON

În cazul distribuţiei continue a masei, integrala pe suprafaţa închisă din (8.65) se poate transforma (în anumite condiţii de continuitate şi derivabilitate) în integrala de volum (conform unei teoreme a lui Gauss) :

$$\oint_S \vec{\Gamma}\, d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{\Gamma}\, dV, \qquad (8.66)$$

unde divergenţa vectorului $\vec{\Gamma}$ este prin definiţie scalarul:

$$\operatorname{div}\vec{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_x + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma_y + \frac{\partial}{\partial z}\Gamma_z = \partial_x\Gamma_x + \partial_y\Gamma_y + \partial_z\Gamma_z. \quad (8.67)$$

Combinînd cu (8.65) rezultă

$$\int_V \operatorname{div}\vec{\Gamma}\,dV = -4\pi\gamma\int_V \rho\,dV \text{ sau } \operatorname{div}\vec{\Gamma} = -4\pi\gamma\rho \quad (8.68)$$

(volumul V fiind arbitrar) şi introducînd potenţialul V (8.58), obţinem *ecuaţia lui Poisson*:

$$\operatorname{lap} V = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\gamma\rho, \quad (8.69)$$

unde lap f sau Δf este laplaceanul (operatorul lui Laplace):

$$\operatorname{lap} f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f,$$

$$\operatorname{lap} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.70)$$

Ecuaţia lui Poisson (8.69) ne permite să aflăm potenţialul V şi deci cîmpul gravitaţional $\vec{\Gamma} = -\operatorname{grad} V$, dacă cunoaştem densitatea ρ de distribuţie a masei şi condiţiile pe frontieră.

8.9. CÎMPUL GRAVITAŢIONAL AL UNEI SFERE OMOGENE

8.9.1. CÎMPUL ŞI POTENŢIALUL

Să calculăm cîmpul gravitaţional al unei sfere omogene (sau formată din pături omogene) de masă m şi rază R (fig. 8.15). În virtutea simetriei sferice, cîmpul este *radial* şi dependent numai de r.

a) În *exteriorul* sferei teorema lui Gauss ne dă (integrăm pe sfera de rază r, ţinînd seama că Γ este radial şi constant pe această sferă):

$$\Phi = \oint \vec{\Gamma}\,d\vec{S} = \oint \Gamma\,dS = \Gamma\oint dS = \Gamma 4\pi r^2 = -4\pi\gamma m \Rightarrow \Gamma = -\gamma\frac{m}{r^2}. \quad (8.71)$$

Prin urmare, *cîmpul gravitaţional al unei* **sfere omogene în exteriorul** *ei coincide cu cîmpul unui punct material de masă m situat în* **centrul** *sferei.*

La fel, expresia (8.53) a potenţialului se aplică şi în *exteriorul* unei sfere omogene.

b) În *interiorul sferei omogene*, aceeaşi teoremă ne dă:

$$\Gamma 4\pi r^2 = -4\pi\gamma m_i = -4\pi\gamma\rho\frac{4\pi}{3}r^3 \Rightarrow \Gamma = -\gamma\frac{m_i}{r^2} = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho r, \quad (8.72)$$

unde m_i este masa sferei de rază r, interioară faţă de punctul ales.

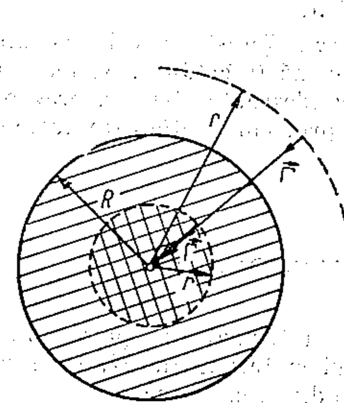


Fig. 8.15

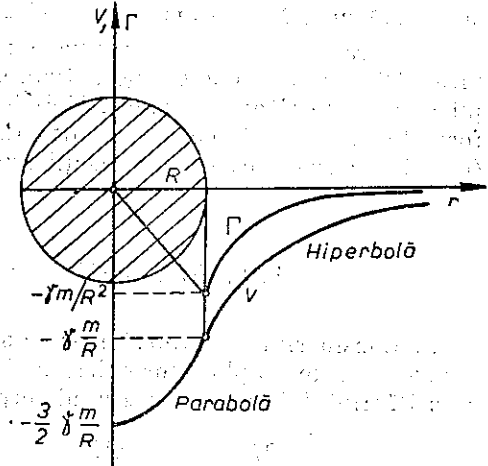


Fig. 8.16

La suprafaţa sferei cîmpul este maxim în modul, spre exterior scade invers proporţional cu pătratul distanţei de la centrul sferei, iar în interior este *proporţional* cu distanţa pînă la centru (fig. 8.16).

Pentru o *pătură sferică omogenă* cîmpul în *interiorul cavităţii* este *nul*, deoarece în (8.72) membrul drept va fi nul.

Potenţialul în *interiorul unei sfere omogene* este

$$V = \int_r^\infty \vec{\Gamma}\,d\vec{r} = \int_r^R\left(-\frac{4\pi}{3}\gamma\rho r\right)dr + \int_R^\infty\left(-\gamma\frac{m}{r^2}\right)dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\gamma m}{R^3}r^2 - \frac{3}{2}\frac{\gamma m}{R} = -\frac{1}{2}\frac{\gamma m}{R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right),\ r \leqslant R. \quad (8.73)$$

În centrul sferei ($r = 0$) potenţialul va fi

$$V_0 = -\frac{3}{2}\gamma\frac{m}{R}. \quad (8.74)$$

8.9.2. ENERGIA POTENŢIALĂ GRAVITAŢIONALĂ

Energia potenţială gravitaţională a unei sfere omogene se calculează cu ajutorul lui (8.55):

$$dm = \rho 4\pi r^2\,dr,\ U = \frac{1}{2}\int V\,dm = -\frac{\pi\gamma m\rho}{R}\int_0^R\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)r^2\,dr = -\frac{3}{5}\gamma\frac{m^2}{R}. \quad (8.75)$$

Energia potențială (8.75), luată cu semn schimbat, reprezintă *energia de legătură gravitațională*, adică energia necesară pentru a împrăștia particulele sistemului la infinit sau, altfel, lucrul mecanic care trebuie efectuat împotriva forțelor gravitaționale pentru a desface sistemul în materie difuză împrăștiată la infinit sau, în sfîrșit, energia care se degajă la formarea sistemului (prin acțiunea forțelor gravitaționale) din materie difuză împrăștiată la infinit.

Astfel, energia de legătură gravitațională a unei sfere cu masa $m = 1$ kg și diametrul $2R = 10$ cm, este $-U = 8 \cdot 10^{-10}$ J.

Dacă raza sferei scade, energia potențială scade (crește în valoarea absolută). Diferența de energie potențială se transformă în căldură. Astfel se explică în parte (Kant, Laplace, Helmholtz) incandescența stelelor, presupuse formate din materie cosmică foarte rarefiată, prin contracție gravitațională (restul energiei provine din reacții nucleare).

8.10. ACCELERAȚIA GRAVITAȚIONALĂ

a) Considerînd Pămîntul sferă omogenă sau format din pături sferice omogene, putem aplica formulele de la punctul material. Fie M, R masa și raza Pămîntului, m — masa unui corp la altitudinea h. Atunci,

$$\Gamma = -\gamma \frac{M}{r^2} = -\frac{\gamma M}{(R+h)^2} = -g, \quad V = -\gamma \frac{M}{r} = -\frac{\gamma M}{R+h}, \tag{8.76}$$

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\frac{\gamma mM}{(R+h)^2} = -mg = -G, \tag{8.77}$$

$$g = \frac{\gamma M}{(R+h)^2}, \; g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}, \; g = g_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2, \tag{8.78}$$

unde g_0 este accelerația gravitațională la nivelul mării. Cîmpul gravitațional terestru coincide cu vectorul accelerației gravitaționale.

Pentru înălțimi mici deasupra solului ($h \ll R$) avem aproximativ:

$$U = mV = -\frac{\gamma mM}{R+h} = -\gamma \frac{mM(R-h)}{R^2-h^2} \cong$$

$$\cong -\gamma \frac{mM}{R} + \gamma \frac{mMh}{R^2} = \text{const} + mg_0h; \tag{8.79}$$

$$g = g_0 \left(\frac{1}{1+h/R}\right)^2 \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right), \text{ pentru } h \ll R. \tag{8.80}$$

În 1930 a fost adoptată următoarea formulă pentru g(φ — latitudinea, h — altitudinea în metri):

$$g = 978{,}049(1 + 0{,}0052884 \sin^2 \varphi - 0{,}0000059 \sin 2\varphi) - 0{,}0003086\, h, \; \text{cm/s}^2. \tag{8.81}$$

b) Cunoscînd γ, R și g_0 putem calcula masa Pămîntului din (8.78), precum și densitatea medie:

$$M = g_0 R^2 \frac{1}{\gamma} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \; \langle \rho \rangle = \frac{M}{V} = 5{,}5 \text{ g/cm}^3. \tag{8.82}$$

În realitate, scoarța terestră are o densitate de 2,5 g/cm³, de unde rezultă că densitatea nucleului terestru trebuie să fie mai mare de 5,5 g/cm³.

Energia de legătură gravitațională a Pămîntului rezultă din (8.75): $-U = 2{,}25 \cdot 10^{32}$ J.

Pentru o variație mică a razei, obținem din (8.75) prin diferențiere:

$$\Delta U = \frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R^2} \Delta R = -U \frac{\Delta R}{R}. \tag{8.83}$$

Dacă raza terestră s-ar micșora cu 1 m, prin contracție gravitațională a globului, ar rezulta o energie

$$-\Delta U = 3{,}5 \cdot 10^{25} \text{ J}$$

de peste un milion de ori mai mare decît producția mondială anuală actuală de energie electrică ($\sim 3 \cdot 10^{19}$ J).

Masa Soarelui M se poate calcula din (8.48):

$$M = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{T^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \tag{8.84}$$

unde $a = 149{,}5 \cdot 10^6$ km este distanța Pămînt—Soare și T perioada de revoluție a Pămîntului (1 an).

c) *Accelerația gravitațională terestră* variază pe suprafața Pămîntului datorită densităților diferite ale straturilor geologice (pe aceasta se bazează și o metodă de prospecțiune geologică pe baza anomaliilor gravimetrice). Variațiile lui g se pot măsura cu ajutorul barometrului universal al lui M. V. Lomonosov (1757) (fig. 8.17). În balonul A este aer, iar în balonul B este mercur, deasupra fiind vidul barometric. Aparatul este menținut la 0°C (într-o cuvă cu gheață și apă în echilibru termic). Temperatura aerului din A fiind constantă, se aplică legea Boyle-Mariotte pentru transformarea izotermă: $pV = \text{const}$. Presiunea p este însă echilibrată de coloana de mercur: $p = \rho g h$. Dacă g variază, variază p, deci și volumul aerului din A, deci meniscul M se deplasează în tubul capilar. Deoarece suprafața S este foarte mare față de secțiunea capilarului, înălțimea h practic nu variază. Precizia măsurătorilor este foarte mare.

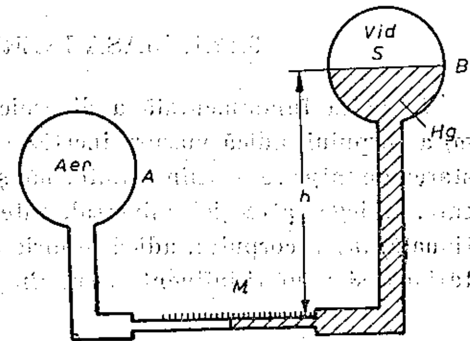


Fig. 8.17

8.11. SATELIȚII ARTIFICIALI

Sateliții artificiali se supun legilor mișcării ale lui Kepler. Considerînd pentru simplificare orbite circulare, avem:

$$F = \frac{\gamma m M}{(R+h)^2} = mg = \frac{mv^2}{R+h}, \quad g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2, \tag{8.85}$$

de unde viteza și perioada satelitului:

$$v = \sqrt{g(R+h)} = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}},$$

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = 2\pi\frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g_0}}. \tag{8.86}$$

La nivelul mării rezultă (*prima viteză cosmică*):

$$v_{\rm I} = \sqrt{g_0 R} \approx 7{,}9 \text{ km/s}, \quad T_{\rm I} = 2\pi\sqrt{R/g_0} \approx 1 \text{ h } 25 \text{ min}. \tag{8.87}$$

Pentru a putea părăsi definitiv cîmpul de atracție terestru, corpul trebuie să aibă o energie cinetică cel puțin egală cu energia sa potențială sau cu lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de atracție:

$$\frac{mv^2}{2} = mg_0R = \int_r^\infty \gamma\frac{mM}{r^2}\,dr, \quad v_{\rm II} = \sqrt{2g_0R} = \sqrt{2}\cdot v_{\rm I} = 11{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}, \tag{8.88}$$

— cea de-*a doua viteză cosmică*.

Există și o a treia viteză cosmică, necesară corpului pentru a putea ieși din cîmpul gravitațional al Soarelui, deci pentru a părăsi sistemul solar și a ieși în spațiul cosmic interstelar (între 13 și 75 km/s, la lansarea de pe Pămînt).

8.12. MASA INERTĂ ȘI MASA GREA. PRINCIPIUL ECHIVALENȚEI

8.12.1. MASA INERTĂ ȘI MASA GREA

În legea fundamentală a dinamicii intervine masa inertă sau inerțială m_i a corpului, adică măsura inerției sale, a tendinței corpului de a-și păstra starea de mișcare rectilinie uniformă, și de a se opune, reacționa, la forțe aplicate. În legea atracției universale intervine masa grea sau gravifică (gravitațională) m_g a corpului, adică proprietatea masei de a genera un cîmp gravitațional și a suferi influența unui cîmp gravitațional:

$$F = m_i a, \quad F = -\gamma\frac{m_g M_g}{r^2}. \tag{8.89}$$

Aceste legi fiind independente, s-a pus problema dacă masele inertă și grea sînt diferite sau reprezintă o aceeași mărime fizică. Experiențele de mare precizie ale lui Eötvös au arătat că cele două mase sînt proporționale, și în unități adecvate (de exemplu, în SI), sînt egale (primele experiențe au fost făcute chiar de I. Newton). Experiența lui Eötvös se bazează pe faptul că greutatea aparentă a unui corp este egală în modul cu tensiunea din firul de suspensie (fig. 8.18) măsurată de exemplu cu un dinamometru. Direcția firului de suspensie nu coincide cu direcția razei terestre. În adevăr, tensiunea $\vec{T}$ din fir, compusă cu forța de atracție *gravitațională* $m_g\vec{g}$, în care intervine masa *grea*, trebuie să dea forța rezultantă centripetă (din cauza mișcării corpului pe cercul paralel odată cu rotația diurnă a Pămîntului), $m_i\omega^2R\cos\varphi$ (conform legii fundamentale $\vec{F} = m_i\vec{a}$), în care intervine masa *inertă*.

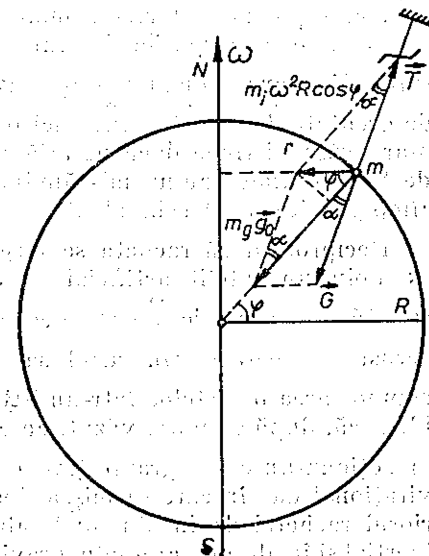


Fig. 8.18

Pentru unghiul de deviere α rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_i\omega^2R\cos\varphi\sin\varphi}{m_gg_0 - m_i\omega^2R\cos^2\varphi} = \frac{\omega^2R\cos\varphi\sin\varphi}{\frac{m_g}{m_i}g_0 - \omega^2R\cos^2\varphi}. \tag{8.90}$$

Dacă masele $m_{i,g}$ sînt proporționale, unghiul α va fi același pentru toate corpurile (adică direcția firului de suspensie rămîne invariabilă dacă schimbăm corpurile suspendate), ceea ce este confirmat de experiență. Prin urmare, *inerția și gravitatea sînt proprietăți ale unei* **mase unice**.

S-ar putea construi un sistem de unități „gravitațional" în care $\gamma = 1$. Atunci dimensiunea forței ar fi:

$$[F] = \frac{[m]^2}{[r]^2} = M^2L^{-2} = \text{kg}^2/\text{m}^2, \tag{8.91}$$

în schimb, în legea fundamentală a dinamicii ar apărea un coeficient parazit:

$$F = kma, \quad [k] = \frac{[F]}{[m][a]} = \frac{M^2L^{-2}}{MLT^{-2}} = L^{-3}MT^2, \tag{8.92}$$

avînd valoarea $k = 1/\gamma = 10^{11}/6{,}67$ kg·s²/m³. Sistemul SI este deci un sistem „dinamic" (sau „inerțial").

8.12.2. PRINCIPIUL ECHIVALENȚEI

După cum am văzut, o particulă de masă m aflată într-un cîmp gravitațional Γ capătă o accelerație $\vec{a} = \vec{\Gamma}$, independentă de masa particulei. Pe de altă parte, o particulă *izolată*, considerată într-un SR neinerțial, care se deplasează cu accelerația $\vec{a}$ față de SR inerțiale, se comportă analog, anume are o accelerație $-\vec{a}$, independentă de masa particulei. Fie, de exemplu, o

rachetă care se mişcă în spaţiul interastral, departe de stele, astfel încît cîmpul gravitaţional să poată fi neglijat. Cît timp racheta se mişcă rectiliniu uniform faţă de SR inerţiale (de exemplu, SR astronomic, legat de stelele „fixe"), toate obiectele din rachetă vor fi în stare de „imponderabilitate", în poziţii indiferente, fixe, faţă de rachetă. Dacă racheta capătă o acceleraţie $\vec{a}$ faţă de SR inerţiale, toate obiectele din interiorul ei vor „cădea" cu acceleraţia $-\vec{a}$, corespunzător forţei complementare $\vec{F}_c = -m\vec{a}$. Dar, în acelaşi mod s-ar comporta corpurile din interiorul rachetei, dacă ea s-ar mişca *inerţial şi în schimb* ar acţiona un cîmp gravitaţional omogen $\vec{\Gamma} = -\vec{a}$, generînd forţa de greutate $\vec{P} = m\vec{\Gamma} = \vec{F}_c$. Nici o experienţă efectuată în *interiorul* rachetei n-ar putea distinge dacă ne aflăm într-o rachetă în mişcare accelerată faţă de SR inerţiale sau ne mişcăm inerţial (faţă de stele) dar ne aflăm într-un cîmp gravitaţional echivalent.

Reciproc, dacă racheta se mişcă liber într-un cîmp gravitaţional $\vec{\Gamma}$, de exemplu un satelit artificial în cîmpul gravitaţional terestru, atunci ea capătă o acceleraţie $\vec{a} = \vec{\Gamma}$, deci constituie un SR neinerţial în mişcare cu această acceleraţie (în cazul satelitului, acceleraţie gravitaţională $\vec{g}$). Dar comportarea obiectelor într-un SR neinerţial în mişcare cu acceleraţia $\vec{a}$ este identică, după cum am văzut, cu comportarea lor într-un SR inerţial în care ar acţiona un cîmp gravitaţional $-\vec{a}$, care tocmai compensează cîmpul gravitaţional dat în care se mişcă liber racheta. Ca rezultat, obiectele din interiorul rachetei devin „imponderabile", comportîndu-se la fel ca într-un SR inerţial şi în absenţa cîmpului gravitaţional. Prin urmare, considerînd mişcarea faţă de un SR neinerţial mişcat adecvat, putem „anihila" (local) cîmpul gravitaţional. Un alt exemplu celebru este „liftul lui Einstein". Dacă liftul cade liber cu acceleraţia gravitaţională $\vec{g}$, toate obiectele din cabină devin imponderabile (cad la fel, cu aceeaşi acceleraţie $\vec{g}$, ca în experienţa cu tubul lui Newton), ca şi cum liftul ar sta pe loc şi ar dispărea cîmpul gravitaţional. Reciproc, dacă liftul este tras vertical în sus cu acceleraţia g, toate obiectele din cabină devin de două ori mai grele, ca şi cum liftul ar sta pe loc şi cîmpul gravitaţional s-ar dubla.

Comportarea identică a corpurilor într-un cîmp gravitaţional şi într-un SR neinerţial constituie *principiul echivalenţei* dintre gravitaţie şi inerţie (dintre forţele de gravitaţie şi forţele de inerţie). Acest principiu rezultă din egalitatea dintre masa inertă şi masa grea şi stă la baza teoriei relativiste a gravitaţiei (teoria generală a relativităţii creată de A. Einstein în 1915—1916).

Trebuie însă observat că echivalenţa amintită are caracter *local* (pe intervale mici de spaţiu şi timp) şi nu global, cîmpurile gravitaţionale reale fiind totdeauna neomogene.

Problemă rezolvată. O navă cosmică de masă $M = 12$ t se mişcă în jurul Lunii pe o orbită circulară la altitudinea $h = 100$ km. Pentru a trece pe orbita de aselenizare se conectează pentru scurt timp motorul. Viteza de ejectare a gazelor $u = 10$ km/s. Raza Lunii $R_L = 1{,}7 \cdot 10^3$ km, acceleraţia căderii libere la suprafaţa Lunii $g_L = 1{,}6$ m/s².

a) Ce cantitate de combustibil trebuie consumat pentru ca, prin conectarea motorului în regim de frînare în punctul A al traiectoriei nava să aselenizeze în punctul B (fig. 8.19, *a*)?

b) În a doua variantă a aselenizării, i se comunică navei, în punctul A, un impuls îndreptat spre centrul Lunii pentru a o trece pe o orbită tangentă la Lună în punctul C (fig. 8.19, *b*). Ce cantitate de combustibil trebuie consumat în acest caz?

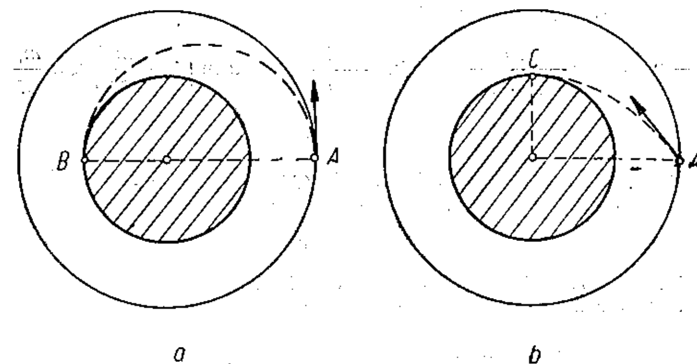


Fig. 8.19

Rezolvare. a) După impulsul de frînare, nava are viteza $\vec{v}_A$ în acelaşi sens cu viteza $\vec{v}$ de dinainte. Conform legii lui Kepler nava se va mişca pe o elipsă cu centrul Lunii în focarul elipsei şi cu vîrfurile elipsei în A („apogeu") şi B („perigeu"). După încetarea funcţionării motorului scriem ecuaţia conservării energiei mecanice (cinetice şi potenţiale) şi a momentului cinetic faţă de centrul Lunii (pentru punctele A, B):

$$\frac{1}{2}(M - m_c)v_A^2 - \gamma\frac{M_L(M - m_c)}{R_L + h} = \frac{1}{2}(M - m_c)v_B^2 - \gamma\frac{M_L(M - m_c)}{R_L},$$

$$(M - m_c)v_A(R_L + h) = (M - m_c)v_B R_L.$$

Din aceste ecuaţii obţinem:

$$v_A = \sqrt{2\gamma\frac{M_L R_L}{(R_L + h)(2R_L + h)}} = R_L\sqrt{2g_L\frac{R_L}{(R_L + h)(2R_L + h)}};$$

unde am ţinut seama că $g_L = \gamma M_L/R_L^2$.

Viteza iniţială a navei se obţine din legea fundamentală:

$$\gamma\frac{M_L M}{(R_L + h)^2} = \frac{Mv^2}{R + h}, \quad v = \sqrt{\gamma\frac{M_L}{R_L + h}} = R_L\sqrt{\frac{g_L}{R_L + h}} \approx 1{,}6 \text{ km/s}.$$

Scriem conservarea impulsului în procesul de frînare:

$$Mv = (M - m_c)v_A + m_c(v + u),$$

de unde

$$(M - m_c)(v - v_A) = m_c u.$$

Dar

$$v - v_A = R_L\sqrt{\frac{g_L}{R_L + h}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_L}{2R_L + h}}\right) = v\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + h/2R_L}}\right) \approx$$

$$\approx v\left[1 - \left(1 - \frac{h}{4R_L}\right)\right] = v\frac{h}{4R_L} \approx 24 \text{ m/s}.$$

În sfîrşit,

$$m_c = M\frac{v - v_A}{u + v - v_A} \approx M\frac{v - v_A}{u} \approx 29 \text{ kg}.$$

Se poate folosi direct formula lui Meşcerski:

$$v - v_A = u \ln \frac{M}{M - m_c} = u \ln \frac{1}{1 - m_c/M} \approx u \ln\left(1 + \frac{m_c}{M}\right) \approx u \frac{m_c}{M}.$$

b) Scriem conservarea energiei:

$$\frac{1}{2}(M - m_c)v_A^2 - \gamma \frac{M_L(M - m_c)}{R_L + h} = \frac{1}{2}(M - m_c)v_C^2 - \gamma \frac{M_L(M - m_c)}{R_L},$$

$$v_A^2 = v^2 + v_r^2,$$

unde v_r este viteza imprimată radial către centrul Lunii.

Scriem conservarea momentului cinetic (faţă de centrul Lunii):

$$(M - m_c)v(R_L + h) = (M - m_c)v_C R_L,$$

unde componenta v_r nu contribuie evident la momentul cinetic.

Din aceste ecuaţii obţinem:

$$v_r = h\sqrt{\frac{g_L}{R_L + h}} \approx 96 \text{ m/s}.$$

Din conservarea impulsului pe direcţia radială, avem:

$$0 = (M - m_c)v_r - m_c u,$$

$$m_c = M\frac{v_r}{v_r + u} \approx M\frac{v_r}{u} \approx 115 \text{ kg}.$$

PROBLEME

8.1. Să se calculeze cîmpul gravitaţional Γ al unui inel subţire de masă m şi rază R, la o distanţă z de centrul inelului, pe axa acestuia. La ce distanţă cîmpul este maxim şi ce valoare are?

R. $\Gamma = \gamma m \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$, $z_m = R/\sqrt{2}$, $\Gamma_m = \frac{2\gamma m}{3R^2\sqrt{3}}$.

8.2. Două sfere omogene de raze $R_{1,2}$ şi mase $m_{1,2}$ aflate la distanţa l dintre centrele lor, pornesc din repaus sub acţiunea forţelor de atracţie gravitaţională. Cu ce viteză relativă se vor ciocni ele?

R. $v_r = \sqrt{2\gamma(m_1 + m_2)\left(\frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{l}\right)}$.

8.3. Două particule de mase $m_{1,2}$, aflate la distanţa l dintre ele, pornesc din repaus sub acţiunea forţelor de atracţie gravitaţională. După cît timp se ciocnesc ele?

R. $t = \frac{\pi}{2} l \sqrt{\frac{l}{2\gamma(m_1 + m_2)}}$.

8.4. Un corp este aruncat vertical în sus de la suprafaţa Pămîntului cu viteza iniţială v_0. Neglijînd rezistenţa aerului, să se afle la ce înălţime maximă se ridică corpul şi timpul de urcare (se ţine seama de variaţia lui g cu altitudinea).

R. $h_{max} = R\frac{v_0^2}{2gR - v_0^2}$; $t_u = \frac{R}{2gR - v_0^2}\left[v_0 + \frac{2gR}{\sqrt{2gR - v_0^2}} \arcsin\frac{v_0}{\sqrt{2gR}}\right]$.

8.5. Un corp de masă m cade de la înălţime mare h, fără viteză iniţială. Neglijînd rezistenţa aerului, să se afle energia cinetică cu care ajunge corpul la suprafaţa Pămîntului şi timpul de cădere.

R. $E_c = mgh\frac{R}{R + h}$, $t_c = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R + h}{2g}}\left[\sqrt{Rh} + (R + h)\arcsin\sqrt{\frac{h}{R + h}}\right]$.

8.6. Cunoscînd durata anului $T = 365$ zile $= 3{,}16 \cdot 10^7$ s, distanţa Pămînt—Soare $R_{ps} = 150 \cdot 10^9$ km şi unghiul sub care se vede de pe Pămînt discul solar $\alpha = 32'$, să se calculeze acceleraţia gravitaţională de cădere liberă la suprafaţa Soarelui.

R. $g_S \approx \frac{16\pi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{T^2} R_{ps} \approx 270$ m/s².

8.7. O planetă descrie o elipsă cu excentricitatea e. Ştiind viteza v_1 a planetei la periheliu, să se afle viteza ei la afeliu.

R. $v_2 = \frac{1 - e}{1 + e} v_1$.

8.8. Pentru mişcarea unei planete în jurul Soarelui pe o elipsă cu semiaxa mare egală cu a, să se arate că: a) $v^2 = \gamma M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$; b) $v_m = \sqrt{\gamma\frac{M}{a}}$; c) $\sqrt{v_1 v_2} = v_m$, unde $v_{1,2}$ sînt vitezele la extremităţile unui diametru al orbitei şi $v_m = v|_{r=a}$.

8.9. Un satelit se mişcă pe o orbită circulară de rază r cu perioada de revoluţie T. Dacă i se imprimă satelitului o viteză radială u sau o viteză suplimentară tangenţială u, el trece pe o orbită eliptică. Care va fi noua perioadă de revoluţie în cele două cazuri?

R. $T_1 = T\left[1 - \left(\frac{uT}{2\pi r}\right)^2\right]^{-3/2}$, $T_2 = T\left[1 + \left(\frac{uT}{2\pi r}\right)^2 - \frac{uT}{\pi r}\right]^{-3/2}$.

8.10. Pentru mişcarea unei planete pe o orbită eliptică, de excentricitate e şi parametru p, să se deducă următoarele formule pentru componentele vitezei:

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}} e \sin\theta, \quad v_\theta = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(1 + e\cos\theta),$$

respectiv

$$v_x = -\sqrt{\frac{\gamma M}{p}} \sin\theta, \quad v_y = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(e + \cos\theta).$$

Să se arate că hodograful vitezei este un cerc cu raza $\sqrt{\frac{\gamma M}{p}}$ şi centrul în $\left(\frac{\pi}{2}, e\sqrt{\frac{\gamma M}{p}}\right)$

respectiv $\left(0, e\sqrt{\frac{\gamma M}{p}}\right)$.

8.11. O cometă se mişcă pe o orbită parabolică de parametru p. La periheliu viteza ei este v_0. Să se afle viteza cometei la distanţa r de Soare.

R. $v = v_0\sqrt{\frac{p}{2r}}$.

8.12. Să se arate că la mişcarea în cîmp central, energia cinetică se poate scrie sub forma:

$$E_c = \frac{L^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d(1/r)}{d\theta}\right)^2\right].$$

8.13. Un punct material se mişcă sub acţiunea unei forţe centrale într-un mediu rezistent. Să se arate că oricare ar fi legea forţei de rezistenţă, punctul descrie o traiectorie plană al cărei plan trece prin centrul forţei.

8.14. O particulă de masă m, sub acţiunea unei forţe centrale de atracţie, descrie un cerc de rază R, centrul forţei fiind situat *pe cerc*. Cînd particula se găseşte la distanţa $2R$ de centrul forţei, viteza ei este v_0. Să se afle viteza particulei şi legea forţei în funcţie de distanţa r pînă la centrul forţei.

R. $v = 4R^2v_0/r^2$, $F = -32mR^4 v_0^2/r^5$.

8.15. O navă se roteşte cu viteza unghiulară ω_0. Pe navă există un volant care poate fi rotit de un motor în jurul aceleiaşi axe ca şi nava (fig. 8.20). Ştiind momentul de inerţie al volantului I

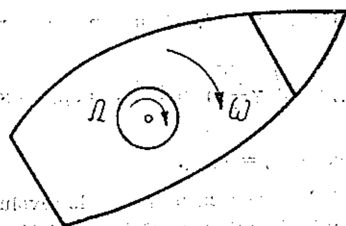


Fig. 8.20

şi al navei întregi I_0, să se calculeze ce lucru mecanic trebuie să efectueze motorul pentru a opri rotaţia navei.

R. $W = \frac{1}{2}\,\frac{I_0(I_0 - I)}{I}\,\omega_0^2.$

8.16. Ştiind distanţa minimă r_1 (periheliu) şi cea maximă r_2 (afeliu) ale unei planete de masă m, faţă de Soare, de masă M, să se afle perioada de revoluţie T şi momentul cinetic L ale planetei faţă de Soare. Se dă constanta gravitaţională γ.

R. $T = \pi\sqrt{(r_1 + r_2)^3/2\gamma M}$, $L = m\sqrt{2\gamma M r_1 r_2/(r_1 + r_2)}$.

8.17. Ştiind perioada de revoluţie T a unei planete în jurul Soarelui, să se calculeze în cît timp cade pe Soare (neglijînd dimensiunile Soarelui) un corp de la o distanţă egală cu raza orbitei planetei.

R. $\tau = T/4\sqrt{2}.$

8.18. Să se calculeze presiunea p datorită gravitaţiei în interiorul unei sfere omogene de masă m şi rază R (se dă constanta gravitaţională γ) (grad $p = \rho\vec{\Gamma}$).

R. $p = \frac{3\gamma m^2}{8\pi R^4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$

CAPITOLUL 9

CINEMATICA MIŞCĂRILOR RELATIVĂ ŞI ABSOLUTĂ

Mişcarea corpurilor este totdeauna studiată în raport cu un SR. Oricare ar fi SR ales, el se află la rîndul său în mişcare faţă de alte corpuri. Este important de ştiut cum se schimbă mărimile fizice cînd trecem de la un SR la altul, ce este intrinsec (absolut), independent de SR şi ce este relativ, dependent de SR ales.

9.1. MIŞCĂRILE ABSOLUTĂ, RELATIVĂ ŞI DE TRANSPORT

Fie două SR; unul din ele se consideră *prin convenţie fix* (S), iar celălalt va fi atunci numit *mobil* (S'). Mişcarea corpului faţă de SR fix se numeşte *absolută*, iar faţă de SR mobil — *relativă* (Mariotte). Mişcarea SR mobil, *împreună cu toate punctele legate rigid (solidar) de el*, faţă de SR fix, se numeşte mişcare de *transport* sau de antrenare (fig. 9.1).

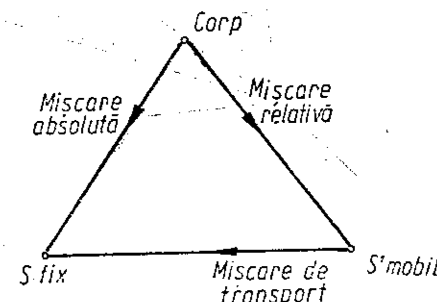


Fig. 9.1

Exemple: **a)** Mişcarea unui pasager faţă de vapor este mişcare relativă, mişcarea aceluiaşi pasager faţă de ocean — mişcare absolută, mişcarea vaporului faţă de ocean — mişcare de transport.

b) Mişcarea unui satelit faţă de Pămînt este mişcare relativă, mişcarea aceluiaşi satelit faţă de Soare — mişcare absolută, mişcarea Pămîntului faţă de Soare — mişcare de transport.

9.2. COMPUNEREA DEPLASĂRILOR ŞI A VITEZELOR

9.2.1. TRATAREA SINTETICĂ

Fie un punct material P a cărui mişcare este studiată sau raportată la două SR (repere), unul considerat fix S şi altul mobil S' (fig. 9.2). După un interval de timp $\Delta t = t_1 - t$ mobilul se deplasează (privit din S) din P

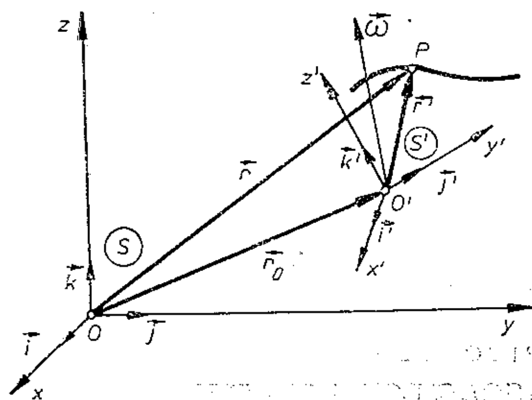


Fig. 9.2

în P_1, iar reperul mobil se deplasează din poziția S' în poziția S_1' (fig. 9.3). Deplasarea absolută a mobilului, față de S, este

$$\Delta\vec{r}_{abs} = \overrightarrow{PP_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}.$$

Pentru a găsi deplasarea relativă trebuie să marcăm mai întîi față de S_1' poziția inițială a mobilului așa cum a înregistrat-o și o consideră în continuare observatorul mobil (din S'), adică poziția punctului P deplasat *solidar* cu S'. Acesta este punctul $\tilde{P}$ situat față de S_1' *exact la fel* ca P față de S'. Pentru observatorul mobil punctele P, $\tilde{P}$ se confundă deoarece reprezintă pentru el poziția inițială a mobilului.

Fig. 9.3

Deplasarea $P\tilde{P}$ reprezintă pentru observatorul fix (din S) deplasarea unui punct P legat rigid de reperul mobil S', deci reprezintă deplasarea de *transport* sau de antrenare:

$$\Delta\vec{r}_{tr} = \overrightarrow{P\tilde{P}} = \vec{\tilde{r}} - \vec{r}.$$

Pentru observatorul mobil poziția inițială și cea finală ale mobilului sînt $\tilde{P}$ și P_1 și deci deplasarea relativă $\Delta\vec{r}_{rel} = \overrightarrow{\tilde{P}P_1} = \vec{r}_1' - \vec{\tilde{r}}'$. Aceste poziții $\vec{\tilde{r}}'$, $\vec{r}_1'$ și această deplasare $\vec{r}_1' - \vec{\tilde{r}}'$ în intervalul (t, t_1) pentru a fi considerate *relative la S'* trebuie măsurate cu instrumentele de măsură (rigle și ceasornice) proprii observatorului mobil S', adică aflate „la bordul" lui S', deoarece, în adevăr, observatorul mobil măsoară elementele mișcării relative ($\vec{r}'$ la t', $\vec{r}_1'$ la t_1', unde t' — timpul măsurat în S'), deci față de el, cu mijloacele sale proprii. Instrumentele din S' pot fi de exemplu transportate din S sau etalonate (sincronizate) după cele din S, la un moment dat, după un anumit procedeu sau construite după aceeași „rețetă".

Se pune întrebarea dacă măsurînd aceeași distanță (de exemplu, $\tilde{P}P_1$) sau lungime a unui obiect sau durată a unui proces (de exemplu, $\Delta t = t_1 - t$, respectiv $\Delta t' = t_1' - t'$), din diferite SR, se obțin aceleași rezultate sau, altfel, dacă *rezultatele măsurătorilor de lungime și durată depind de starea de mișcare a instrumentelor sau a obiectelor măsurate.*

În mecanica clasică se consideră că lungimile și duratele, măsurate în diferite SR, sînt *egale*, independente de mișcarea SR sau *invariante* la schimbarea SR sau, altfel, au un caracter absolut (desigur cu rigle și ceasornice etalonate identic).

O serie de experiențe efectuate la sfîrșitul secolului trecut, privind propagarea luminii, au dus la concluzia că la viteze mari, apropiate de viteza luminii în vid ($c = 3\cdot 10^8$ m/s), ipoteza de mai sus nu mai este corectă. Astfel s-a născut teoria relativității (A. Einstein, 1905). De mecanica relativistă ne vom ocupa într-un capitol aparte (Cap. 11).

Rămînînd în cadrul mecanicii *nerelativiste* (viteze obișnuite, deci mici față de viteza luminii), este valabilă ipoteza caracterului absolut al lungimilor și duratelor. Atunci, conform figurii 9.3, în relația

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{P\tilde{P}} + \overrightarrow{\tilde{P}P_1}, \tag{9.1}$$

deplasarea $\overrightarrow{\tilde{P}P_1}$ are aceeași valoare în S și S', deci poate fi considerată deplasare *relativă* $\Delta\vec{r}_{rel}$, adică măsurată cu instrumentele din S'. Obținem astfel *legea de compunere a deplasărilor*:

$$\Delta\vec{r}_{abs} = \Delta\vec{r}_{rel} + \Delta\vec{r}_{tr} \quad \text{sau} \quad d\vec{r}_{abs} = d\vec{r}_{rel} + d\vec{r}_{tr}. \tag{9.2}$$

Cum am presupus și caracterul absolut al duratelor $\Delta t = t_1 - t = \Delta t' = t_1' - t'$ sau $dt = dt'$, împărțind relațiile de mai sus la $\Delta t = \Delta t'$, respectiv la $dt = dt'$, obținem legea de compunere a vitezelor:

$$\frac{\Delta\vec{r}_{abs}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_{rel}}{\Delta t'} + \frac{\Delta\vec{r}_{tr}}{\Delta t}, \quad \frac{d\vec{r}_{abs}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{rel}}{dt'} + \frac{d\vec{r}_{tr}}{dt}$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}. \tag{9.3}$$

9.2.2. TRATAREA ANALITICĂ

Să deducem acum *analitic* compunerea deplasărilor și a vitezelor. Conform figurii 9.2:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}', \tag{9.4}$$

$$d\vec{r}' = dx'\vec{i}' + dy'\vec{j}' + dz'\vec{k}' + x'd\vec{i}' + y'd\vec{j}' + z'd\vec{k}' =$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt'}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt'}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt'}\vec{k}'\right)dt' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\,dt,$$

unde t' este timpul în reperul S' și am aplicat formulele lui Poisson. În virtutea ipotezei caracterului absolut al duratelor și lungimilor : $t = t'$, $dt = dt'$ și coordonatele x', y', z' ca și dx', dy', dz' coincid cu cele relative, măsurate cu instrumentele din S', prin urmare,

$$d\vec{r}' = \vec{v}_{rel}\,dt + \vec{\omega}\times\vec{r}'\,dt,\quad \dot{\vec{r}}' = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}'. \qquad (9.5)$$

Observăm că $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \vec{v}_{abs}$ în timp ce $d\vec{r}'/dt \neq \vec{v}_{rel}$, ci

$$d\vec{r}'/dt = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}'. \qquad (9.5')$$

Rezultă astfel legea de compunere a deplasărilor :

$$d\vec{r}_{abs} = d\vec{r} = \vec{v}\,dt = d\vec{r}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}'\,dt + \vec{v}_{rel}\,dt =$$
$$= \vec{v}_{rel}\,dt + (\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}')dt = d\vec{r}_{rel} + d\vec{r}_{tr} \qquad (9.6)$$

și legea de compunere a vitezelor :

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr},\quad \vec{v}_{abs} = \dot{\vec{r}},\quad \vec{v}_{tr} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}' \qquad (9.7)$$

Viteza relativă este

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}', \qquad (9.8)$$

unde în calculul vitezei relative variază doar coordonatele relative x', y', z' ale mobilului față de S' cu $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ considerați ficși.

Viteza de transport sau de antrenare este

$$\vec{v}_{tr} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot} \qquad (9.9)$$

este viteza mobilului P considerat legat rigid de SC mobil sau, altfel, este viteza punctului „suport" din S' *prin care trece* mobilul P în momentul respectiv sau, încă, este viteza mobilului față de S *dacă* mobilul s-ar opri în acel moment față de S' și ar fi doar antrenat de S'. Viteza de transport $\vec{v}_{tr}$ se compune în general din viteza de translație $\vec{v}_0$ a originii lui S' plus o viteză $\vec{v}_{rot}$ datorită *rotației* reperului S' în jurul axei $\vec{\omega}$, așa cum am văzut la mișcarea rigidului.

9.3. COMPUNEREA ACCELERAȚIILOR

Derivăm (9.7) :

$$\vec{a}_{abs} = \dot{\vec{v}}_{abs} = \dot{\vec{v}}_{rel} + \dot{\vec{v}}_{tr},$$

unde însă, $\dot{\vec{v}}_{rel}$ *nu* coincide încă cu $\vec{a}_{rel}$, la fel cum $\dot{\vec{r}}$ *nu* coincide cu $\vec{v}_{rel}$ (9.5), anume :

$$\dot{\vec{v}}_{rel} = (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}')^{\cdot} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' +$$
$$+ \dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}' = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}. \qquad (9.10)$$

La fel, $\dot{\vec{v}}_{tr}$ *nu* coincide cu $\vec{a}_{tr}$, anume

$$\dot{\vec{v}}_{tr} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times r' +$$
$$+ \vec{\omega}\times(\vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{a}_{tr} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}. \qquad (9.11)$$

Obținem astfel legea de compunere a accelerațiilor (G. Coriolis 1831) :

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{cor}, \qquad (9.12)$$

unde

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' \qquad (9.13)$$

este evident accelerația relativă ;

$$\vec{a}_{tr} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega \qquad (9.14)$$

este accelerația de transport (sau de antrenare), adică accelerația acelui punct-suport din S' prin care trece mobilul P, așa cum am văzut la mișcarea rigidului (Cap. 5) ;

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}^{\perp},\quad (\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}^{\parallel} = 0) \qquad (9.15)$$

este **accelerația Coriolis** (matematician francez 1792–1843). Această accelerație suplimentară este *perpendiculară pe axa momentană de rotație* $\vec{\omega}$ și pe viteza *relativă* $\vec{v}_{rel}$, și apare numai atunci cînd S' se *rotește* și mișcarea relativă a mobilului are o componentă *transversală* pe axa de rotație. Accelerația Coriolis este un efect de „interferență" dintre mișcarea relativă și cea de transport.

Apariția accelerației suplimentare Coriolis se poate explica astfel : chiar dacă mobilul s-ar mișca cu viteză relativă constantă față de SC mobil S', față de SC fix S însă, vectorul $\vec{v}_{rel}$ se rotește datorită rotației SC mobil, ceea ce dă o accelerație absolută suplimentară $\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \frac{1}{2}\vec{a}_{cor}$ (pe lîngă $\vec{a}_{rel}$ dacă $\vec{v}_{rel}$ nu este constant față de S'). Cealaltă jumătate $\frac{1}{2}\vec{a}_{cor}$ provine din faptul că mobilul trece în mișcarea sa *relativă* (față de S') prin puncte-suport $\vec{r}'$ avînd vitezele $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega}\times\vec{r}'$ diferite, datorită variației lui $\vec{r}'$ cu $d\vec{r}' = \vec{v}_{rel}\,dt$, ceea ce dă o accelerație absolută suplimentară $\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \frac{1}{2}\vec{a}_{cor}$ (pe lîngă $\vec{a}_{tr}$), egală deci cu variația vitezei de transport datorită deplasării *mobilului față de* S', pe lîngă cea datorită mișcării lui S' însuși.

Exemple

1) Sistemul mobil S' în *rotație uniformă*, fără translație (alegem $\vec{r}_0 = 0$), deci $\vec{v}_0 = 0$, $\vec{\omega} = \text{const}$, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0$.

Viteza de transport se reduce la $\vec{v}_{rot}$ (deoarece $\vec{v}_0 = 0$) :

$$\vec{v}_{tr} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{v}_{rot} = \vec{\omega}\times\vec{R}'. \qquad (9.16)$$

Accelerația de transport se reduce la $\vec{a}_\omega$ (deoarece $\dot{\vec{v}}_0 = 0$, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0$):

$$\vec{a}_{tr} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_\omega = \omega^2 R' \vec{n}' = \frac{v_{rot}^2}{R'} \vec{n}' = \frac{v_{tr}^2}{R'} \vec{n}'. \qquad (9.17)$$

Să considerăm acum trei cazuri. Mobilul se mișcă *uniform* față de SC mobil: *a*) paralel cu $\vec{\omega}$, *b*) circular în jurul axei $\vec{\omega}$, *c*) radial față de S' (fig. 9.4—6).

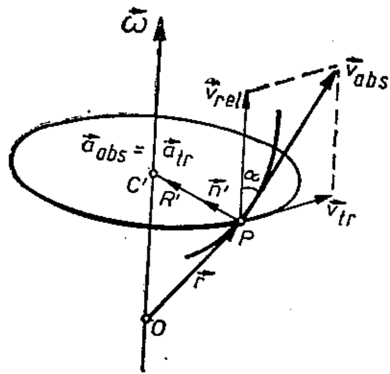


Fig. 9.4

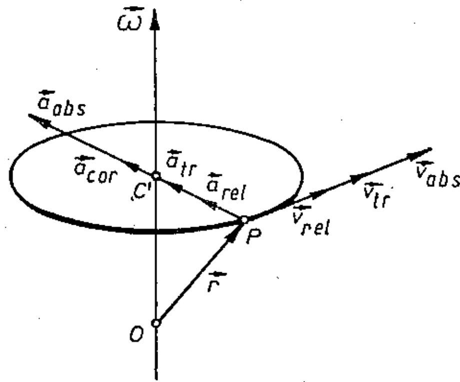


Fig. 9.5

a) În acest caz (fig. 9.4): $\vec{a}_{rel} = 0$ deoarece $\vec{v}_{rel}$ nu variază față de S'; $\vec{a}_{cor} = 0$ deoarece $\vec{v}_{rel}$ este paralel cu $\vec{\omega}$ și deci $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 0$. Atunci $\vec{a}_{abs}$ se reduce la $\vec{a}_{tr}$ (9.17).

Mobilul descrie o elice înfășurată pe cilindrul de rază R', avînd o mișcare elicoidală uniformă ($\vec{n}' = \vec{n}$ — versorul normalei principale la traiectoria absolută; $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_n$ — accelerația normală la traiectoria absolută; $R'/\sin^2\alpha = R$ — raza de curbură a traiectoriei absolute).

b) În acest caz (fig. 9.5): $\vec{a}_{rel} = \vec{n}' v_{rel}^2/R'$, mișcarea fiind circulară uniformă și $\vec{v}_{rel}$ variind ca direcție;

$$\vec{a}_{abs} = \frac{v_{rel}^2}{R'}\vec{n}' + \frac{v_{tr}^2}{R'}\vec{n}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \qquad (9.18)$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2\omega v_{rel}\,\vec{n}' \text{ este centripetă.}$$

Pe de altă parte, deoarece avem algebric $v_{abs} = v_{rel} + v_{tr}$, rezultă direct:

$$\vec{a}_{abs} = \frac{v_{abs}^2}{R'}\vec{n}' = \left(\frac{v_{rel}^2}{R'} + \frac{v_{tr}^2}{R'} + \frac{2v_{rel}v_{tr}}{R'}\right)\vec{n}',$$

ceea ce coincide cu (9.18) deoarece

$$a_{cor} = 2\omega v_{rel} = \frac{2v_{rel}v_{tr}}{R'}. \qquad (9.19)$$

Mobilul are o mișcare circulară față de ambele SC ($\vec{n}' = \vec{n}$, $R' = R$, $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_n$).

Jumătate din accelerația Coriolis provine din faptul că vectorul $\vec{v}_{rel}$ este rotit solidar cu S', deci apare accelerația suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$. Cealaltă jumătate a accelerației Coriolis provine din faptul că viteza de transport $\vec{v}_{tr} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R}'$ variază datorită deplasării *relative*, față de S', a mobilului, adică datorită variației lui $\vec{r}$ sau $\vec{R}'$; $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}' = \vec{v}_{rel}$, deci apare accelerația suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ (viteza de transport este tangentă la cerc și schimbă *direcția* atunci cînd mobilul se deplasează pe cerc în mișcarea sa relativă).

c) În acest caz (fig. 9.6):

$$\vec{a}_{rel} = 0, \vec{a}_{tr} = \omega^2 R' \vec{n}',$$
$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} \qquad (9.20)$$

(este tangențială).

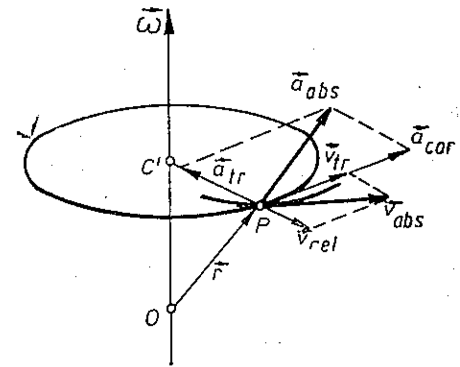


Fig. 9.6

Jumătate din accelerația Coriolis $\vec{a}_{cor}$ provine din faptul că viteza relativă $\vec{v}_{rel}$ este rotită solidar cu S', iar cealaltă jumătate din faptul că mobilul în mișcarea sa *relativă* se depărtează de axă și ajunge în puncte cu alte viteze de transport $\vec{v}_{tr}$.

Mobilul descrie o spirală parcursă accelerat.

2) Sistemul mobil S' în *translație, fără rotație*: $\vec{\omega} = 0$. Atunci $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0$ și nu există accelerație Coriolis: $\vec{a}_{cor} = 0$,

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_0, \qquad (9.21)$$

unde $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0$ este accelerația translației sistemului mobil. Prin urmare, în cazul *translației* reperului mobil legea de compunere a accelerațiilor este asemănătoare cu legea de compunere a vitezelor, fără al treilea termen (accelerația Coriolis fiind nulă).

Dacă SC mobil se mișcă *rectiliniu uniform* față de SC fix (translație uniformă), atunci $\vec{a}_0 = 0$ și

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel}, \qquad (9.22)$$

adică *accelerația unui punct material nu se schimbă atunci cînd trecem de la un SR dat la oricare altul, care se deplasează rectiliniu uniform față de primul*, sau altfel spus, accelerația este *invariantă* față de astfel de schimbări de SR, sau încă, *accelerația este aceeași față de toate SR care se află în translație uniformă unele față de altele*.

În particular, *mișcarea rectilinie uniformă* ($\vec{a} = 0$) *într-un SR va fi tot rectilinie uniformă față de oricare alt SR care se deplasează rectiliniu uniform față de primul*.

Dacă un SR este *inerțial*, atunci toate SR în translație uniformă față de el vor fi de asemenea inerțiale și, reciproc, oricare două SR inerțiale se află în translație uniformă unul față de celălalt.

9.4. COMPUNEREA TRANSLAȚIILOR ȘI ROTAȚIILOR

Experiența arată că, dacă un mobil este solicitat la două mișcări, rezultatul final este același, indiferent dacă mișcările au loc simultan sau succesiv într-o ordine oarecare. Altfel spus, mișcările efectuate simultan de un mobil sînt independente una de alta. Acesta este *principiul independenței mișcărilor*, găsit și enunțat de Galilei.

Se spune că un rigid este animat de două mișcări simultane, dacă are o *mișcare relativă* (de translație și de rotație) față de un sistem de referință S' și o *mișcare de transport* (de translație și de rotație) solidară cu S' față de un sistem de referință fix S.

A compune cele două mișcări înseamnă a găsi *mișcarea absolută* (de translație și de rotație) a rigidului față de sistemul de referință fix S.

Rezultatele de mai jos sînt valabile în mecanica nerelativistă.

Compunerea translațiilor finite sau infinitezimale se face după regula paralelogramului, deplasările fiind reprezentate prin vectori *liberi* corespunzători.

Compunerea rotațiilor ω se reduce tot la regula paralelogramului (G. Coriolis), dar ținînd seama de *poziția* axelor de rotație, deoarece vectorii $\vec{\omega}$ *nu* sînt liberi, ci glisanți (alunecători).

Mai jos considerăm rotații infinitezimale sau rotații uniforme ($\vec{\omega} = \text{const}$).

a) Axe de rotație concurente. Alegînd punctul de reducere (polul) în punctul de intersecție al axelor, avem

$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}, \tag{9.23}$$

adică se aplică direct regula paralelogramului (fig. 9.7).

b) Deplasarea axei de rotație. O deplasare *paralelă* a axei $\vec{\omega}$ cu segmentul $\vec{b}$ generează o translație transversală $\vec{\omega} \times \vec{b}$ (fig. 9.8). În adevăr, alegînd polul în O' apare o translație suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{b}$, egală cu viteza acestui punct, iar axa $\vec{\omega}$ se mută paralel în O':

$$\vec{\omega} \times \vec{r} \equiv \vec{\omega}' \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{b}, \ (\vec{r} = \vec{b} + \vec{r}'). \tag{9.24}$$

Am folosit dealtfel această proprietate în cap. 7.

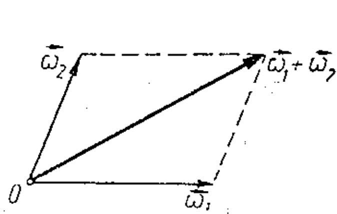


Fig. 9.7

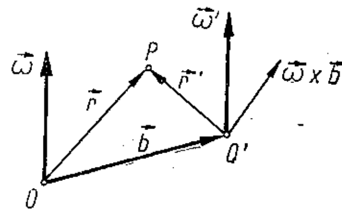


Fig. 9.8

c) „Cuplu" de rotații. Două rotații egale în modul, cu axele paralele, dar de sens contrar ($\vec{\omega}, -\vec{\omega}$), dau o *translație* $\vec{b} \times \vec{\omega} = (-\vec{b}) \times (-\vec{\omega})$, perpendiculară pe planul lor și egală cu „momentul" cuplului (fig. 9.9). Această translație se obține deplasînd o axă peste cealaltă, conform regulii precedente. *Exemplu*: mișcarea rezultantă de translație a pedalelor la o bicicletă.

d) Axe de rotație paralele. Deplasăm axele în punctul O', definit prin raportul distanțelor sale pînă la axe:

$$b_1/b_2 = \omega_2/\omega_1, \ (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq 0), \tag{9.25}$$

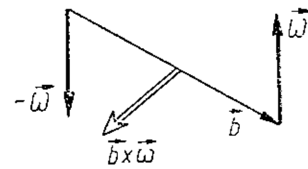


Fig. 9.9

interior sau exterior după cum vectorii $\vec{\omega}_{1,2}$ sînt paraleli sau antiparaleli (fig. 9.10). Translațiile generate astfel sînt de sensuri opuse și se anihilează, deoarece $\omega_1 b_1 = \omega_2 b_2$, și se obține o rotație pură $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ în O' (ca la compunerea forțelor paralele).

e) Axe de rotație neconcurente. Deplasăm întîi, paralel, una din axe pînă la intersecția ei cu cealaltă și le compunem acolo după regula paralelogramului; dar prin această deplasare se generează o translație. Deplasăm apoi

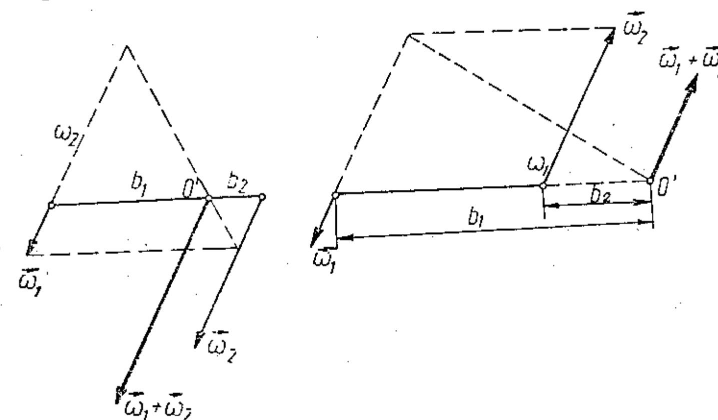


Fig. 9.10

vectorul obținut $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ pentru a anula componenta translației, transversală pe $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$; rezultă deci pînă la urmă o *mișcare elicoidală*. Invers, *o mișcare elicoidală poate fi descompusă în două rotații neconcurente* (analog reducerii unui sistem arbitrar de forțe aplicate rigidului la două forțe neconcurente).

Exemplu. Să considerăm mișcarea unei particule într-un plan. Introducem un sistem de coordonate S' cu aceeași origine $O' = O$ și cu axa „Or" trecînd permanent prin punctul P în care se află particula, cealaltă axă fiind perpendiculară, „$O\theta$" (fig. 9.11). Descompunerea pe aceste axe corespunde descompunerii în componentele radiale și transversale. Mișcarea particulei pe traiectoria sa absolută poate fi privită acum ca fiind compusă din mișcarea relativă rectilinie de-a lungul axei Or — mișcarea radială, și o mișcare de transport de rotație, odată cu S' — mișcarea transversală.

Compunerea deplasărilor:

$$d\vec{r} = dr\vec{i}' + r d\theta \vec{j}', \ d\vec{r}_{abs} = d\vec{r}, \ d\vec{r}_{rel} = dr\vec{i}', \ d\vec{r}_{tr} = r d\theta \vec{j}',$$

de unde compunerea vitezelor:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{i}' + r\dot{\theta}\vec{j}'_{\perp} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}, \ \vec{v}_{abs} = \dot{\vec{r}}, \ v_{rel} = \dot{r} = v_r,$$
$$v_{tr} = v_{rot} = r\dot{\theta} = v_\theta.$$

Componenta radială a vitezei $v_r = \dot{r}$ este viteza relativă, iar componenta transversală $v_\theta = r\dot{\theta}$ este viteza de transport.

Compunerea accelerațiilor:

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{r}\,\vec{i}', \quad \vec{a}_{tr} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r} = \ddot{\theta}r\vec{j}' - \dot{\theta}^2 r\vec{i}',$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{j}'.$$

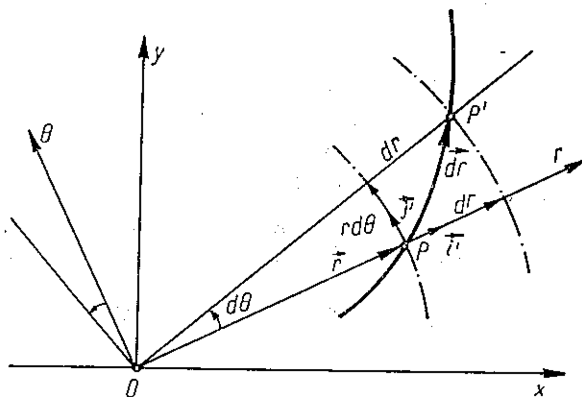


Fig. 9.11

deci

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{cor} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\vec{i}' + (\ddot{\theta}r + 2\dot{r}\,\dot{\theta})\vec{j}'.$$

unde la componenta radială $a_r = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r$ contribuie atît accelerația relativă cît și o parte din accelerația de transport, iar la componenta transversală $a_\theta = \ddot{\theta}r + 2\dot{\theta}\dot{r}$ contribuie restul din accelerația de transport și accelerația Coriolis. Am regăsit astfel formulele cunoscute pentru coordonate polare.

Observăm că accelerația transversală poate fi scrisă astfel:

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{r}(r^2\dot{\theta}).$$

PROBLEME

9.1. Un plan $Ox'y'$ se rotește în jurul originii O cu viteza unghiulară $\omega = \omega(t)$. Mișcarea unui punct față de acest plan mobil este dată de ecuațiile cinematice $x' = x'(t)$ și $y' = y'(t)$. Să se afle componentele accelerației absolute față de axele mobile $Ox'y'$.

R. $a'_x = \ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x' - y'\dot{\omega}.$

$a'_y = \ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y' + x'\dot{\omega}.$

Dacă punctul se mișcă de-a lungul axei $Ox' : y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$ și regăsim rezultatele de la exemplul precedent ($x' = r,\ \omega = \dot{\theta}$).

9.2. O particulă P pornește din vîrful O al unui con de deschidere 2α și se mișcă uniform pe generatoarea conului cu viteza v. Conul însuși se rotește uniform în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω (fig. 9.12). Să se afle mărimea accelerației absolute a punctului.

R. $a = \omega v \sin\alpha\sqrt{\omega^2 t^2 + 4}.$

9.3. Un tren (sau vapor) se mișcă cu viteza v de-a lungul meridianului. Să se afle accelerația absolută a trenului în funcție de latitudinea φ.

R. $a = \frac{1}{R}[v^4 + 2\omega^2 R^2(1+\sin^2\varphi)v^2 + R^4\omega^4\cos^2\varphi]^{1/2}.$

9.4. Un corp se rotește în jurul unei axe orizontale Ox cu accelerația unghiulară ε_1. La rîndul său axa Ox se rotește în jurul unei axe verticale fixe Oy cu accelerația unghiulară constantă ε_2. Să se afle viteza unghiulară a rotației rezultante, dacă inițial corpul era în repaus. Care sînt axoidele?

R. $\omega = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\cdot t$; axoidele sînt două conuri circulare cu axele Ox, Oy și generatoarea comună sub unghiul arctg $\varepsilon_2/\varepsilon_1$.

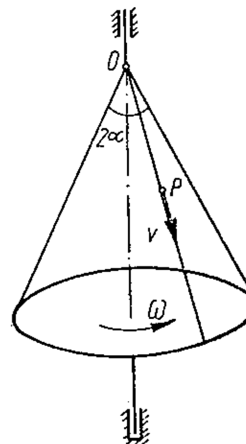


Fig. 9.12

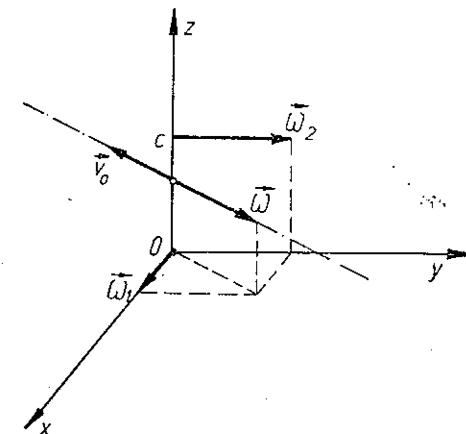


Fig. 9.13

9.5. Să se compună rotațiile din figura. 9.13.

R. Mișcarea elicoidală: $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $v = -\frac{\omega_1\omega_2 c}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$; axa elicoidală trece prin $\left(0, 0, \frac{\omega_1\omega_2 c}{\omega_1^2 + \omega_2^2}\right)$.

9.6. Două rigide se rotesc uniform cu vitezele unghiulare $\vec{\omega}_{1,2}$, respectiv în jurul axelor fixe Ox, Oy. Să se calculeze viteza unghiulară și accelerația unghiulară ale rigidului 1 *față de* rigidul 2.

R. $\vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2,\ \omega_{rel} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},$

$\vec{\varepsilon}_{rel} = -\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_{rel} = -\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1,\ \varepsilon_{rel} = \omega_1\omega_2.$

9.7. Un mobil se mișcă pe suprafața Pămîntului cu viteza $|\vec{v}| =$ const care face un unghi $\alpha =$ const cu meridianul locului. Care va fi traiectoria mobilului, dacă el pornește din punctul cu latitudinea $\varphi = 0$ și longitudinea $\theta = 0$?

R. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = e^{-\theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$ (curba *loxodromă*).

Mobilul atinge polul ($\varphi = \pi/2$) înconjurîndu-l de o infinitate de ori ($\theta \to \infty$). Proiecția loxodromei pe planul ecuatorului este o spirală avînd centrul sferei ca punct asimptotic

CAPITOLUL 10

DINAMICA MIŞCĂRILOR RELATIVĂ ŞI ABSOLUTĂ. SISTEME DE REFERINŢĂ NEINERŢIALE

Legile mecanicii clasice newtoniene sînt valabile faţă de SR *inerţiale* (în mişcare rectilinie uniformă faţă de stele şi nebuloase). Faţă de SR *neinerţiale* (care se mişcă accelerat faţă de stelele „fixe") legea inerţiei şi legea fundamentală nu sînt valabile; corpurile nesupuse la forţe se mişcă accelerat, iar corpurile supuse la forţe se pot afla în repaus (relativ). Experienţe mecanice efectuate într-un laborator neinerţial ne permit să determinăm acceleraţia sa faţă de SR inerţiale (faţă de stele). (Apare totuşi o dificultate legată de cîmpul gravitaţional de care vom vorbi mai departe.)

10.1. FORŢELE COMPLEMENTARE

a) Fie mişcarea punctului material raportată la un SR *neinerţial S'*, faţă de care acceleraţia este $\vec{a}_{rel}$.
Atunci,

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{cor}, \tag{10.1}$$

de unde înmulţind cu masa:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{abs} = m\vec{a}_{rel} + m\vec{a}_{tr} + m\vec{a}_{cor}, \tag{10.2}$$

$$\vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_{cor} = m\vec{a}_{rel} \text{ sau } \vec{F} + \vec{F}_c = m\vec{a}_{rel}. \tag{10.3}$$

Prin urmare, într-un SR *neinerţial*, în legea fundamentală trebuie adăugată la forţa reală $\vec{F}$, o forţă fictivă $\vec{F}_c$ numită *forţă complementară* sau pseudoforţă (sau forţă aparentă) (numită, impropriu, şi forţă de inerţie):

$$\vec{F}_c \overset{\text{def}}{=} - m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_{cor} = \vec{F}_{tr} + \vec{F}_{cor}, \tag{10.4}$$

$$\vec{F}_{tr} \overset{\text{def}}{=} - m\vec{a}_{tr} = - m\vec{a}_0 - m\vec{a}_\varepsilon - m\vec{a}_\omega = - m\vec{a}_0 - m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \tag{10.5}$$

$$\vec{F}_{cor} \overset{\text{def}}{=} - m\vec{a}_{cor} = - 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \tag{10.6}$$

unde $\vec{F}_{tr}$ *este forţa complementară de transport* şi $\vec{F}_{cor}$ *este forţa complementară Coriolis.*

b) Conform principiului III, forţei $\vec{F}$ aplicate corpului i se opune forţa reciprocă $\vec{F}' = -\vec{F}$ exercitată de corp asupra „legăturilor" (firelor, barelor etc. care trag sau împing corpul), adică asupra celorlalte corpuri cu care el interacţionează. Forţa reciprocă (de reacţiune) $\vec{F}'$ se datoreşte *inerţiei* corpului: corpul se opune forţei $\vec{F}$ care îi imprimă acceleraţia $\vec{a}_{abs}$:

$$\vec{F}' = -\vec{F} = - m\vec{a}_{abs} = \vec{F}_c - m\vec{a}_{rel} = \vec{F}_c + \vec{F}_c', \tag{10.7}$$

unde

$$\vec{F}_c' = - m\vec{a}_{rel} \tag{10.8}$$

se poate numi forţă complementară „relativă". Prin urmare, forţa reciprocă $\vec{F}'$, *reală*, exercitată de corpul accelerat, datorită inerţiei sale, asupra *legăturilor*, adică asupra corpurilor care-l accelerează, este echipolentă cu rezultanta tuturor forţelor complementare fictive $\vec{F}_c + \vec{F}_c'$, presupusă aplicată *corpului însuşi* în reperul *neinerţial*. Forţa *reală*, $\vec{F}' = -\vec{F}$, aplicată *legăturilor*, a fost numită de Newton *forţă de inerţie* (fiindcă se datoreşte inerţiei corpului). Prin extensiune (nepotrivită), forţele fictive complementare (presupuse aplicate *corpului* în reperul neinerţial), echipolente cu forţele reale de inerţie newtoniene, au fost numite tot forţe de inerţie.

c) În particular, dacă asupra corpului nu acţionează nici o forţă reală ($\vec{F} = 0$, $\vec{a}_{abs} = 0$), el se va mişca *totuşi accelerat faţă de reperul neinerţial* (sub acţiunea forţei complementare $\vec{F}_c$):

$$\vec{a}_{abs} = 0,\ \vec{a}_{rel} = - \vec{a}_{tr} - \vec{a}_{cor}, \tag{10.9}$$

$$\vec{F} = 0,\ \vec{F}_c = - m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_{cor} = m\vec{a}_{rel},\ \vec{F}_c + \vec{F}_c' = 0. \tag{10.10}$$

Forţele complementare îşi fac echilibru şi forţa de inerţie newtoniană nu există.

d) O categorie importantă de SR sînt SR *proprii* ale corpului sau SR care se mişcă *rectiliniu uniform* faţă de SR proprii. În astfel de SR corpul este evident în repaus (SR proprii) sau se mişcă rectiliniu uniform ($\vec{a}_{rel} = 0$), *deşi acţionează o forţă reală* $\vec{F}$. În acest caz ecuaţia (10.3) devine

$$\vec{F} + \vec{F}_c = 0,\ (\vec{a}_{rel} = 0),\ \vec{F}_c = - \vec{F} = - m\vec{a}_{abs} = \vec{F}', \tag{10.11}$$

adică forţa complementară $\vec{F}_c$ este egală în modul şi de sens opus cu forţa reală $\vec{F}$, deci este echipolentă cu forţa de inerţie newtoniană aplicată legăturilor. În acest caz, rezultanta forţelor reale $\vec{F}$ aplicate este în „echilibru" cu forţa complementară $\vec{F}_c$. În general însă, într-un reper neinerţial oarecare

$$\vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_c' = 0, \tag{10.12}$$

adică rezultanta forţelor reale aplicate, $\vec{F}$, este în „echilibru" cu rezultanta *tuturor* forţelor complementare

$$\vec{F}_c + \vec{F}'_c = -m\vec{a}_{abs} = -\vec{F} = \vec{F}' \qquad (10.13)$$

şi rezultanta *tuturor* forţelor complementare $\vec{F}_c + \vec{F}'_c$ este echipolentă cu forţa de inerţie newtoniană aplicată legăturilor (10.7). Problema de dinamică se reduce astfel „formal" la o problemă de statică (metoda cinetostatică). Prin urmare, numai în SR proprii (cînd $\vec{a}_{rel} = 0$, $\vec{F}'_c = 0$), forţa complementară fictivă $\vec{F}_c$ *aplicată corpului* este echipolentă cu forţa reală de reacţiune $\vec{F}' = -\vec{F}$ *aplicată legăturilor*, adică cu forţa de inerţie newtoniană; altfel $\vec{F}' = \vec{F}_c + \vec{F}'_c$.

e) Subliniem că forţele complementare (10.4) sînt forţe *fictive* (în cadrul mecanicii newtoniene) care trebuie adăugate la forţele reale pentru a asigura valabilitatea ecuaţiei fundamentale a dinamicii în SR *neinerţial* considerat. Ele *nu sînt forţe de interacţiune*, nu putem indica corpul care le-ar exercita, de aceea *nu li se aplică nici principiul III al forţelor reciproce*. Deşi pentru observatorul inerţial forţele complementare nu există, pentru observatorul neinerţial ele apar ca forţe reale, *indiscernabile* în cadrul restrîns al laboratorului său (adică prin mijloacele *locale*) de forţele gravitaţionale, fiind aplicate fiecărui punct material şi proporţionale cu masele acestora, ca şi forţele gravitaţionale.

Aplicaţii

a) Într-un vagon mişcat accelerat se află o bilă netedă de masă m, aşezată pe o masă netedă fără frecare şi prinsă cu un resort-dinamometru de peretele anterior al vagonului (fig. 10.1).

Pentru observatorul terestru S bila se mişcă cu acceleraţia $\vec{a} = \vec{a}_{abs}$, ca şi vagonul, fiind trasă de forţa $\vec{F} = m\vec{a}$, căreia i se opune reacţiunea bilei (forţa de inerţie newtoniană) $\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a}$, *aplicată resortului*.

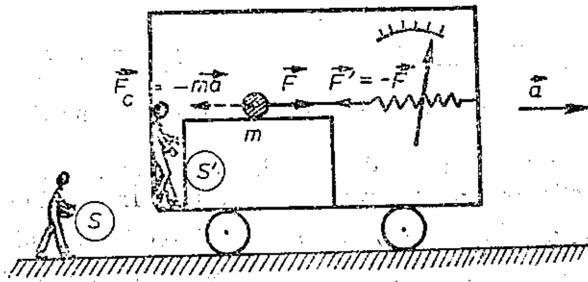


Fig. 10.1

Pentru observatorul S' legat de vagon, bila este în repaus, deşi este trasă de forţa $\vec{F}$ indicată de dinamometru, deci legea II nu e valabilă pentru el. Adăugînd însă forţa complementară fictivă $\vec{F}_c = \vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr} = -m\vec{a}$, aplicată bilei, obţinem rezultantă nulă: $\vec{F} + \vec{F}_c = 0$ şi explicăm astfel echilibrul bilei şi întinderea resortului. Forţa complementară $\vec{F}_c$ este echipolentă în cazul nostru (S' este propriu) cu forţa de inerţie newtoniană $\vec{F}'$ aplicată resortului.

Tăind firul, bila se va mişca rectiliniu uniform pentru observatorul terestru S, în virtutea inerţiei, nefiind trasă de nici o forţă. Pentru observatorul S' însă, bila se va mişca cu acceleraţia $\vec{a}_{rel} = -\vec{a}$ faţă de vagon, şi pentru a explica această mişcare accelerată trebuie introdusă forţa complementară fictivă $\vec{F}_c = m\vec{a}_{rel} = -m\vec{a} = -\vec{F}'_c$, căreia însă nu-i mai corespunde acum o forţă reală, echipolentă, de reacţiune inerţială (forţă de inerţie) asupra legăturilor (S' nefiind propriu, $\vec{a}_{rel} \neq 0$, $\vec{F}' = \vec{F}_c + \vec{F}'_c = 0$ şi nu există forţă de inerţie newtoniană).

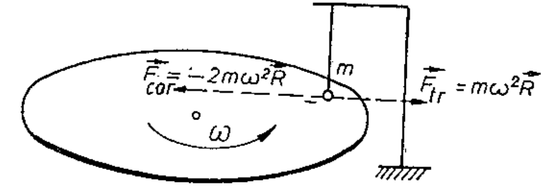


Fig. 10.2

b) Fie acum o platformă în mişcare de rotaţie uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale. O bilă netedă pusă pe podeaua netedă fără frecare a platformei sau suspendată pe Pămînt în dreptul marginii platformei (fig. 10.2), rămîne în repaus faţă de Pămînt ($\vec{F} = m\vec{a}_{abs} = 0$), însă este în mişcare circulară ($-\omega$) faţă de vagon. Pentru a explica aceasta în reperul S' legat de platformă, introducem forţa complementară fictivă aplicată bilei:

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_{cor},$$

$$\vec{a}_{tr} = \omega^2 R\vec{n} \text{ (centripetă)},\ \vec{F}_{tr} = -m\omega^2 R\vec{n} \text{ (centrifugă)}, \qquad (10.14)$$

$$\vec{a}_{cor} = -2\omega v_{rel}\vec{n} = -2\omega^2 R\vec{n} \text{ (centrifugă)},\ \vec{F}_{cor} = 2m\omega^2 R\vec{n} \text{ (centripetă)};$$

$$\vec{F}_c = m\omega^2 R\vec{n} = m\vec{a}_{rel} \text{ (centripetă)}. \qquad (10.15)$$

Acestei forţe complementare $\vec{F}_c$ nu-i corespunde nici-o forţă reală, echipolentă, aplicată legăturilor, S' nefiind propriu pentru bilă (nu există forţă de inerţie newtoniană, $\vec{F}' = \vec{F}_c + \vec{F}'_c = 0$).

Dacă acum bila este legată de centru printr-un fir cu resort-dinamometru şi se află în repaus faţă de platformă (fig. 10.3), atunci faţă de Pămînt bila are o mişcare circulară uniformă (ω) produsă de forţa centripetă dată de resort (fig. 10.3):

$$\vec{F} = m\vec{a}_{abs} = m\omega^2 R\vec{n} = m\vec{a}_n. \qquad (10.16)$$

Datorită inerţiei, bila reacţionează asupra resortului cu forţa centrifugă de inerţie:

$$\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a}_n = -m\omega^2 R\vec{n}. \qquad (10.17)$$

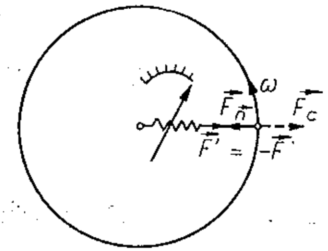


Fig. 10.3

Faţă de platformă însă, bila e în repaus deşi este trasă de forţa centripetă $\vec{F}$ a resortului. Pentru a explica echilibrul în S' introducem forţa complementară fictivă aplicată bilei, care să compenseze forţa resortului $\vec{F}$:

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr} = -m\omega^2 R\vec{n} = -m\vec{a}_n = -\vec{F}. \qquad (10.18)$$

Reperul S' fiind acum propriu, forța complementară $\vec{F}_c$ este echipolentă cu forța de inerție centrifugă aplicată resortului.

c) Fie o platformă în rotație uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale centrale. La marginea platformei este suspendat un corp (fig. 10.4).

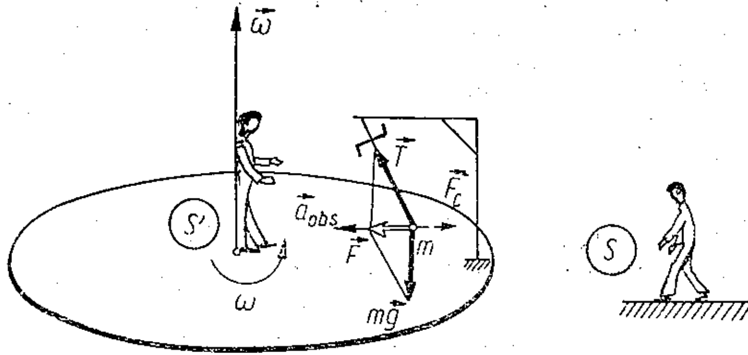


Fig. 10.4

Pentru observatorul terestru S corpul este supus la forța de greutate $m\vec{g}$ și tensiunea din fir $\vec{T}$ a căror rezultantă $\vec{F}$ este centripetă și explică mișcarea circulară uniformă a corpului:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_{abs} = m\omega^2 R\vec{n}. \tag{10.19}$$

Pentru observatorul S' legat de platformă corpul este în repaus $(\vec{a}_{rel} = 0)$ deși este supus la forța centripetă $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$. Cum explică observatorul S' deviația firului de suspensie și echilibrul relativ al corpului? — Introducînd forța complementară

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_{tr} = -m\omega^2 R\vec{n} \text{ (centrifugă)}, \tag{10.20}$$

obținem echilibrul relativ:

$$\vec{F} + \vec{F}_c = 0, \quad (\vec{a}_{rel} = 0). \tag{10.21}$$

Reperul S' fiind propriu, forța complementară

$$\vec{F}_c = -\vec{F} = -m\vec{a}_{abs} \tag{10.22}$$

este echipolentă cu forța de inerție newtoniană aplicată firului $(-\vec{T})$ și Pămîntului $(-m\vec{g})$. Pentru observatorul S' corpul este în echilibru sub acțiunea celor 3 forțe: $m\vec{g}$, $\vec{T}$ și $\vec{F}_c$.

10.2. VERTICALA TERESTRĂ (FIRUL CU PLUMB)

În SR legat de Pămînt trebuie introdusă forța complementară legată de rotația diurnă a Pămîntului:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{86\,400 \text{ s}} = 7{,}27\cdot 10^{-5} \text{ rad/s}, \tag{10.23}$$

$$\vec{a}_{tr} = \omega^2 R \cos\varphi \cdot \vec{n}', \quad \vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \tag{10.24}$$

$$\vec{F}_c = -m\omega^2 R\cos\varphi\cdot\vec{n}' - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}. \tag{10.25}$$

În particular, direcția firului cu plumb (direcția verticalei terestre) nu coincide cu direcția razei terestre (fig. 10.5).

În adevăr, asupra corpului acționează forța de atracție gravitațională $\vec{G}_0 = m\vec{g}_0$ după direcția razei terestre și forța de tensiune $\vec{T}$ a firului de suspensie (sau reacțiunea normală a planului orizontal pe care este așezat corpul). În SC heliocentric (inerțial) S avem (φ — latitudinea):

$$\vec{G}_0 + \vec{T} = m\vec{a}_{abs} = m\omega^2 R\cos\varphi\cdot\vec{n}'. \tag{10.26}$$

În SC terestru S', trebuie adăugată forța complementară, care se reduce la $\vec{F}_{tr}$ ($\vec{F}_{cor} = 0$, deoarece $\vec{v}_{rel} = 0$):

$$\vec{G}_0 + \vec{T} + \vec{F}_c = m\vec{a}_{rel}, \text{ dar } \vec{a}_{rel} = 0,$$

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_{tr} = -m\omega^2 R\cos\varphi\cdot\vec{n}' \text{ (centrifugă)}, \tag{10.27}$$

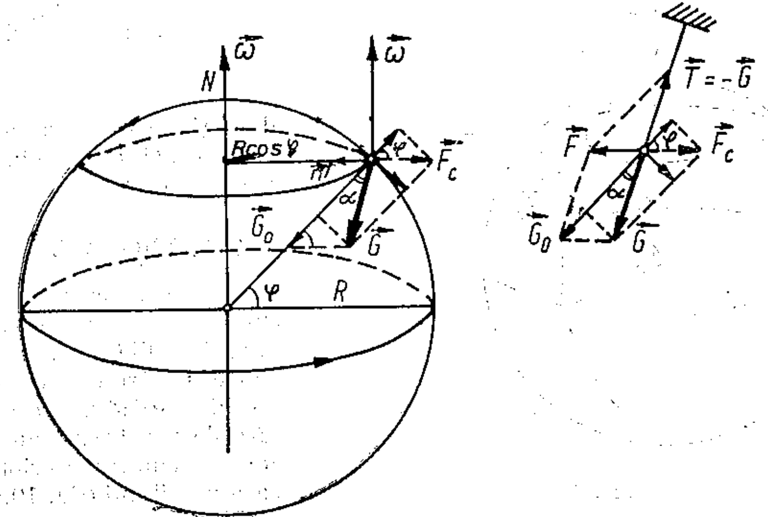


Fig. 10.5

$$\vec{G}_0 + \vec{T} - m\omega^2 R\cos\varphi\cdot\vec{n}' = 0, \tag{10.28}$$

ceea ce evident coincide cu (10.26). Forța de greutate rezultantă va fi:

$$\vec{G} = -\vec{T} = m\vec{g} = \vec{G}_0 + \vec{F}_c = m\vec{g}_0 - m\omega^2 R\cos\varphi\cdot\vec{n}', \tag{10.29}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \omega^2 R \cos\varphi \cdot \vec{n}'; \qquad (10.30)$$

$$G = mg = \frac{G_0 - F_c \cos\varphi}{\cos\alpha} \approx G_0 - F_c \cos\varphi = mg_0 - m\omega^2 R \cos^2\varphi. \qquad (10.31)$$

(unghiul α este foarte mic, $\cos\alpha \approx 1$);

$$G = G_0\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0}\cos^2\varphi\right) = G_0\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi\right). \qquad (10.32)$$

Componenta orizontală a lui $\vec{F}_c$ îndreptată spre ecuator explică și turtirea Pămîntului la Poli (umflarea la Ecuator). Ținînd seama și de efectul turtirii Pămîntului rezultă global, la nivelul mării:

$$G = G_0\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right) \text{ sau } g = g_0\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right), \qquad (10.33)$$

unde G_0 și $g_0 = 9{,}832$ m/s^2 sînt valori la Pol.

Abaterea direcției forței de greutate (a firului cu plumb) de la raza terestră va fi (fig. 10.5):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_c \sin\varphi}{G_0 - F_c\cos\varphi} \approx \frac{m\omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi}{G_0}, \qquad (10.34)$$

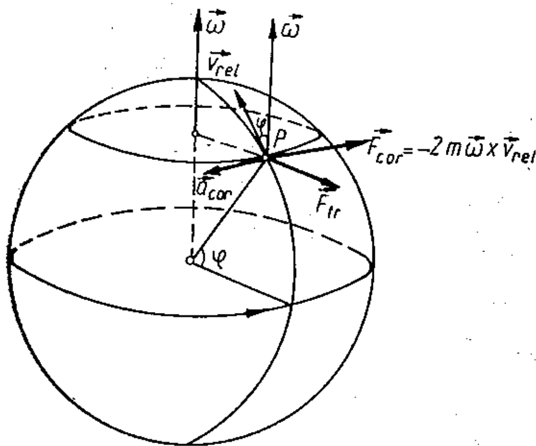


Fig. 10.6

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{\omega^2 R}{2g_0}\sin 2\varphi, \qquad (10.35)$$

deviația este nulă la Poli și Ecuator, și maximă la paralela $\varphi = 45°$ ($\alpha \approx 11'$).

10.3. LEGEA LUI BÄR

Fie mișcarea unui tren sau curgerea unui rîu de-a lungul unui meridian spre Nord, în emisfera nordică. Atunci în afară de efectul micșorării greutății de mai sus, avem și forța complementară Coriolis aplicată mobilului (fig. 10.6)

$$\vec{F}_{cor} = -m\vec{a}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \quad F_{cor} = 2mv_{rel}\omega\sin\varphi, \qquad (10.36)$$

dirijată spre Est (de-a lungul paralelei). O forță de reacțiune echipolentă se aplică pămîntului: $\vec{F}' = \vec{F}_{cor}$ (celelalte forțe $\vec{F}_{tr}$, $\vec{F}_c'$ sînt în planul meridian). Așa se explică uzura șinei drepte la CF duble sau săparea malurilor drepte la rîuri, în emisfera nordică (*legea lui Bär*, descoperită la rîurile siberiene).

Pentru observatorul solar nu există forță Coriolis și fenomenul se explică prin faptul că mergînd spre Nord, apa sau trenul se apropie de axa de rotație a Pămîntului, adică se deplasează mereu spre regiuni unde viteza liniară de transport, tangentă la paralela terestră, este tot mai mică, deci vine cu un surplus (exces) de viteză spre răsărit și lovește malul răsăritean (în emisfera nordică).

În emisfera sudică se uzează șina stîngă și se sapă malul stîng al rîurilor.

În cazul mișcării de-a lungul unei paralele spre Est (sau Vest) apare o micșorare (respectiv, creștere) a greutății corpului și, de asemenea, uzura șinei drepte la CF duble sau săparea malului drept al rîurilor, în emisfera nordică (fig. 10.7).

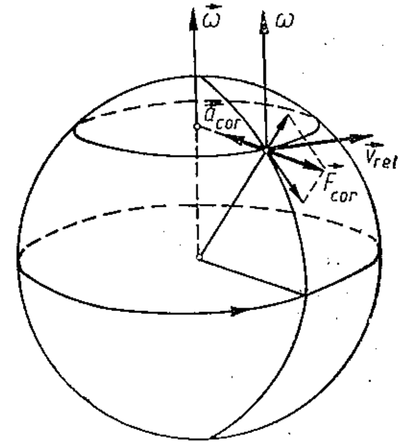


Fig. 10.7

10.4. CĂDEREA LIBERĂ

Dacă un corp cade liber (în vid), accelerația sa relativă față de Pămînt va fi:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{abs} - \vec{a}_{tr} - \vec{a}_{cor} = \vec{g}_0 - \omega^2 R\cos\varphi\cdot\vec{n}' - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}. \qquad (10.37)$$

Alegem un SC cu axa Ox spre Est, Oy spre Nord și Oz verticală în sus, în emisfera nordică (omitem accentul la coordonatele relative) (fig. 10.8):

$$\vec{v}_{rel} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \qquad (10.38) \qquad \vec{a}_{rel} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}, \qquad (10.39)$$

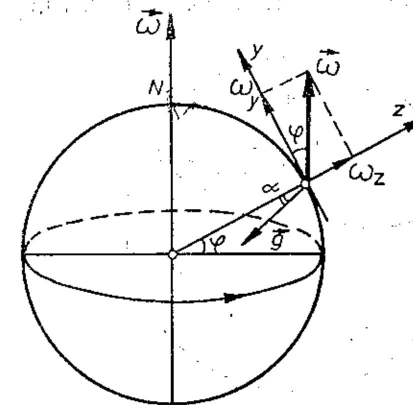


Fig. 10.8

în expresia (10.39) putem aproxima $\vec{v}_{rel} \approx (0, 0, \dot{z})$, ω fiind mic,

$$\vec{\omega} = (0, \omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi), \qquad (10.40)$$

$$\vec{g} = (0, -g\sin\alpha, -g\cos\alpha) \approx (0, 0, -g), \qquad (10.41)$$

unde am pus $\alpha = 0$, deoarece α este foarte mic, și $\dot{x} = \dot{y} = 0$ deoarece viteza orizontală de deviere este neglijabilă față de viteza verticală de cădere:

$$\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega\cos\varphi & \omega\sin\varphi \\ 0 & 0 & \dot{z} \end{vmatrix} = (\dot{z}\omega\cos\varphi, 0, 0), \qquad (10.42)$$

astfel încît (10.39) dă pe componente:

$$\ddot{x} = -2\dot{z}\omega\cos\varphi, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g \qquad (10.43)$$

cu condițiile inițiale:

$$t = 0, \ \vec{r} = (0, 0, h), \ \vec{v}_{rel} = (0, 0, 0),$$

adică corpul cade de la înălțimea h cu viteză inițială nulă.

Integrarea succesivă dă (considerăm g practic constant):

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -gt, \quad \dot{x} = gt^2\omega\cos\varphi,$$

$$x = \frac{1}{3}gt^3\omega\cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2. \tag{10.44}$$

Prin urmare corpul deviază spre răsărit (în emisfera nordică), adică în sensul forței Coriolis $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$.

Devierea totală la sfîrșitul căderii va fi

$$x_m = \frac{2}{3}h\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\omega\cos\varphi, \text{ după } t_m = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{10.45}$$

De exemplu, pentru $h = 1\,000$ m, $\varphi = 45°$ rezultă $x_m \approx 40$ cm.

Experiențele (de exemplu, Reich 1831) confirmă această abatere și deci rotația Pămîntului.

Pentru observatorul solar, corpul, avînd inițial o viteză de transport tangențială de-a lungul cercului paralel, coboară spre Pămînt unde această viteză este mai mică (se apropie de axa de rotație a Pămîntului S—N), deci vine cu o viteză mai mare spre răsărit, deci cade deviat spre răsărit.

10.5. PENDULUL FOUCAULT

O altă experiență celebră este rotația planului de oscilație al unui pendul (Foucault 1850 și alte experiențe anterioare). Pentru oscilații mici, mișcarea corpului se face practic în planul orizontal. Atunci forța Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ deviază corpul mereu spre dreapta, astfel încît el descrie o rozetă (fig. 10.9):

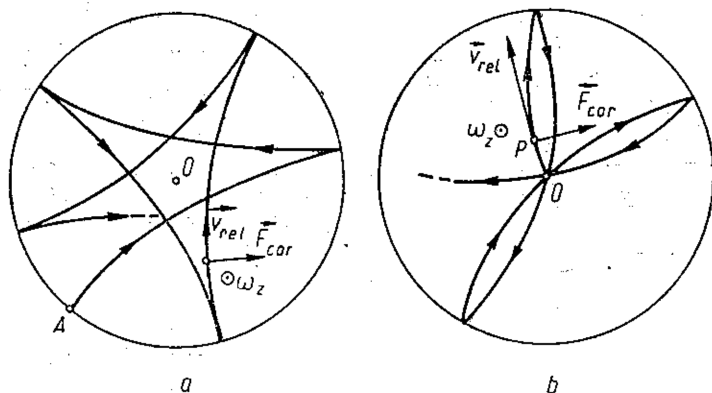


Fig. 10.9

a — pendulul pleacă din poziția deviată *A* fără viteză inițială;
b — pendulul pleacă din *O* cu viteză inițială.

Componenta verticală $\omega_z = \omega\sin\varphi$ rotește planul orizontal (podeaua laboratorului) în jurul verticalei cu perioada

$$T_z = 2\pi/\omega_z = T/\sin\varphi, \; (T = 24 \text{ h}) \tag{10.46}$$

în sens trigonometric, de aceea planul de oscilație a pendulului se rotește aparent în sens contrar, adică în sensul acelor unui ceasornic, cu această perioadă. Tot astfel sînt deviate spre dreapta corpurile care se mișcă în planul orizontal pe suprafața Pămîntului, în emisfera nordică.

Componenta orizontală $\omega_y = \omega\cos\varphi$ rotește planul meridian vertical $S—N$ (peretele $S—N$ al laboratorului) în jurul orizontalei $S—N$ cu perioada

$$T_y = 2\pi/\omega_y = T/\cos\varphi \tag{10.47}$$

și explică abaterea spre Est a corpurilor în căderea liberă (în emisfera nordică).

Prin urmare, cu ajutorul unor experiențe mecanice locale, efectuate într-un laborator pe Pămînt, se poate dovedi rotația Pămîntului față de SC astronomic inerțial.

Observație. Experiențe cu pendulul au fost efectuate pentru prima dată de Viviani la Florența în 1661, apoi de Bartholini în 1833. Jean Bernard Léon Foucault (1819—1868) a efectuat experiențele sale (fără să cunoască experiențele precedente) la Paris în 1850—1851. Lungimea firului de suspensie 67 m, sferă de cupru de 28 kg, perioadă de oscilație peste 16 s (suspensie specială a firului pentru a nu se torsiona).

La sediul Națiunilor Unite din New-York există un pendul din sferă aurită de 91 kg legată de tavan la înălțimea de 7,6 m deasupra podelei vestibulului. Firul de suspensie este din oțel inoxidabil și permite oscilații libere (fără torsionare). Sfera oscilează imediat deasupra unui inel metalic cu diametrul de 1,8 m ridicat deasupra podelei. Perioada de rotație a planului de oscilație 36 h 45 min.

Aplicație

a) Fie un pendul elastic cu resort-spirală (analog celui fixat la acul unui ampermetru), ca în figura 10.10, așezat orizontal pe o platformă care se poate roti în jurul axei sale verticale.

În SC propriu (ales ca în fig. 10.11) trebuie introduse forțe de transport $-m_k\vec{a}_k$ care dau o rezultantă și un cuplu. Față de CM avem (6.99) și (6.100). Dar să facem acum reducerea față de punctul O; atunci rezultanta se deplasează echipolent în O, iar cuplul se schimbă cu momentul rezultantei din CM față de O.

Rezultanta: $\vec{F}'_c = -m\vec{a}_{cm}$,

$$F'_x = m\omega^2(R - R_0),$$

$$F'_y = -m\varepsilon(R - R_0). \tag{10.48}$$

Cuplul: $\vec{M}'_c = (I'_{yz}\omega^2 - I'_{xz}\varepsilon;$

$$-I'_{xz}\omega^2 - I'_{yz}\varepsilon;$$

$$-I'_{zz}\varepsilon + m\varepsilon(R - R_0)R_0),$$

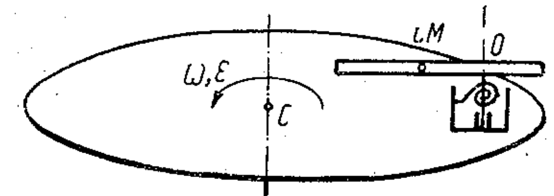


Fig. 10.10

de unde momentul *în raport cu axa de rotație* din O a pendulului:

$$M'_{||} = m\varepsilon(R - R_0)R_0 - I'_0\varepsilon = m\varepsilon RR_0 - I'\varepsilon, \tag{10.49}$$

unde I' este momentul de inerție al pendulului față de axa sa de rotație (iar I'_0 față de axa Oz').

Dacă platforma se rotește *uniform* ($\varepsilon = 0$) acest cuplu este nul și deci pendulul rămîne în echilibru (față de platformă) orientat permanent spre *centrul* platformei, așa cum a fost potrivit de la început (echilibrul va fi stabil dacă resortul este suficient de puternic și rotația platformei nu este prea rapidă). Lucrul era de așteptat întrucît în acest caz avem forțe de transport numai centrifuge, fără componente transversale pe pendul.

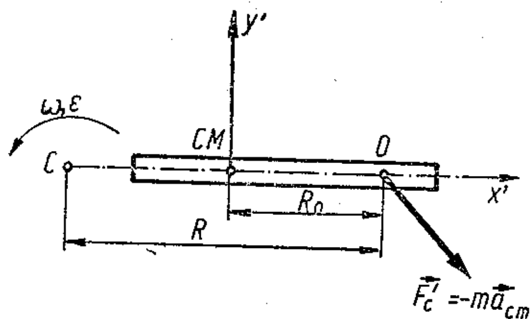


Fig. 10.11

Dacă însă platforma se rotește *neuniform* ($\varepsilon \neq 0$), atunci pendulul se va roti imediat față de platformă, sub acțiunea cuplului (10.49). Și totuși putem construi pendulul în așa fel încît să rămînă *insensibil la orice accelerație unghiulară* ε a platformei ! (adică oricum am roti platforma într-un sens sau altul). Condiția necesară rezultă din anularea momentului față de axa de rotație (10.49) :

$$I'_0 = mR_0(R - R_0) \text{ sau } I' = mR_0R. \tag{10.50}$$

Or, aceasta nu este altceva decît condiția (6.103) :

$$R = R_0 + I'_0/mR_0 = I'/mR_0 = l_r, \tag{10.50'}$$

adică O și C sînt puncte reciproce : centru de oscilație — centru de suspensie, distanța dintre ele fiind lungimea redusă a pendulului.

Exemplu. Tijă subțire omogenă : $I'_0 = \frac{1}{12} ml^2$ și (10.50) dă $l^2 = 12R_0(R - R_0)$. Pentru o distanță $R = 0{,}50$ m și o tijă $l = 0{,}50$ m, rezultă $R_0 = 13$ cm.

b) Fie acum într-o cabină a unui avion un pendul fizic suspendat printr-o articulație, astfel încît axa O—CM să fie *axă de simetrie*, deci automat principală centrală și de asemenea orice axă centrală transversală va fi principală.

Dacă avionul stă în repaus pe suprafața Pămîntului sau se mișcă cu viteză constantă de-a lungul unui cerc paralel sau unui meridian sau chiar de-a lungul oricărui cerc mare, pendulul va rămîne în echilibru față de cabină și va fi orientat spre centrul Pămîntului, adică va indica *verticala terestră* (sau respectiv *orizontul terestru*).

În adevăr, situația este analoagă problemei precedente, numai că rolul momentului de restabilire elastic al resortului spiralat îl joacă acum cîmpul gravitațional terestru $\vec{g}$ și deoarece axele $Ox'y'z'$ sînt principale centrale, cuplul (10.48) va fi nul ($\varepsilon = 0$).

Dacă însă avionul va zbura accelerat pe suprafața Pămîntului, atunci pendulul va devia imediat, așa cum știm foarte bine despre obiectele suspendate într-un vehicul care accelerează, frînează sau virează.

Și acum vine ideea ingenioasă de a proiecta pendulul astfel încît să fie *insensibil* la orice mișcare accelerată la suprafața Pămîntului, adică *să arate permanent verticala terestră sau orizontul terestru*. Condiția este exact aceeași ca la problema precedentă :

$$I'_0 = mR_0(R - R_0) \text{ sau } I' = mR_0R, \text{ unde } R \cong R_p = 6\,400 \text{ km}. \tag{10.51}$$

Deci lungimea redusă a pendulului trebuie să fie $R \cong R_p$. Atunci perioada de oscilație :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgR_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 1\text{h } 25 \text{ min}. \tag{10.52}$$

Pentru o tijă omogenă rezultă condiția

$$l_r = R = R_0 + l^2/12R_0,\ R_0 = \frac{R}{2} - \frac{R}{2}\sqrt{1 - \frac{l^2}{3R^2}} \approx \frac{l^2}{12R},$$

ceea ce practic este irealizabil. Și totuși problema a fost rezolvată cu ajutorul *giroscopului* avînd perioada de precesie (10.52).

Mai mult, o accelerație arbitrară a avionului se descompune într-o componentă orizontală și una verticală. Deoarece accelerația verticală nu influențează pendulul nostru, înseamnă că pentru orice mișcare accelerată a avionului, pendulul astfel construit va indica mereu verticala terestră sau orizontul artificial (în condițiile de zbor fără vizibilitate).

PROBLEME

10.1. Într-un tub orizontal care se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale trecînd printr-un capăt al său, lunecă fără frecare un punct material de masă m (fig. 10.12). La momentul inițial : $x = x_0$ și $v = 0$. Să se afle legea mișcării relative și reacțiunea orizontală a tubului.

R. $x = x_0 \text{ch}\,\omega t,\ N_h = 2m\omega^2 x_0 \text{sh}\,\omega t.$

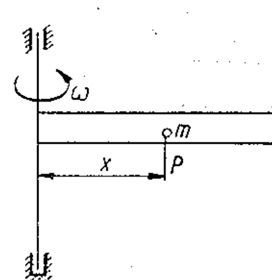


Fig. 10.12

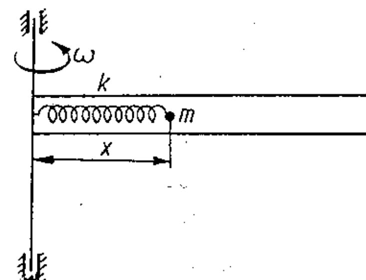


Fig. 10.13

10.2. Un punct material de masă m, fixat de capătul unui resort orizontal de constantă k, se află în echilibru într-un tub, la distanța x_0 de axa verticală (fig. 10.13). Să se afle legea mișcării relative a punctului, dacă tubul începe să se rotească în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă ω.

R. $x = x_0 + 2\frac{\omega^2 x_0}{\omega_0^2 - \omega^2}(1 - \cos\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot t)$, dacă $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > \omega$;

$$x = x_0 + \frac{\omega^2 x_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}\cdot t - 1\right), \text{ dacă } \omega_0 < \omega;$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\omega^2 x_0 t^2, \text{ dacă } \omega_0 = \omega.$$

10.3. Punctul de suspensie O al unui pendul, construit dintr-o tijă omogenă de lungime l, se deplasează orizontal cu accelerația constantă a (fig. 10.14). Să se afle unghiul de deviere a pendulului în poziția de echilibru relativ și perioada micilor oscilații în jurul acestei poziții. Dar dacă punctul de suspensie O oscilează pe orizontală după legea $x = A \sin pt$, care va fi ecuația micilor oscilații, știind că la momentul inițial pendulul era în repaus?

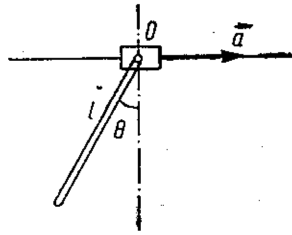


Fig. 10.14

R. a) $\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{a}{g}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3\sqrt{a^2+g^2}}}$;

b) $\theta = \frac{Ap^2}{l(\omega^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{\omega}\sin \omega t\right)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

10.4. Pe suprafața interioară netedă a unei pîlnii conice cu deschiderea 2α poate luneca fără frecare un punct material P. Pîlnia se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale (fig. 10.15). În momentul inițial $t = 0$ punctul se găsea la distanța r_0 de vîrful pîlniei și avea viteză relativ nulă. Să se afle legea de mișcare a particulei. Pentru ce viteză ω punctul urcă?

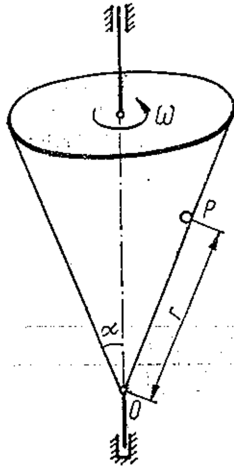


Fig. 10.15

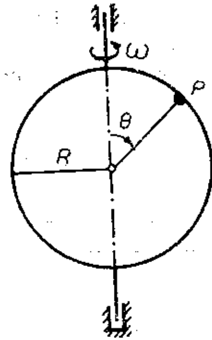


Fig. 10.16

R. $r = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \left(r_0 - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right)\operatorname{ch}(\omega t\sin\alpha)$; pentru $\omega > \frac{\sqrt{r_0 g\cos\alpha}}{r_0\sin\alpha}$ punctul urcă.

10.5. Pe suprafața interioară netedă a unei sfere de rază R, care se rotește în jurul diametrului său vertical cu viteza unghiulară constantă ω, se mișcă fără frecare un punct material P (fig. 10.16). a) Să se afle viteza relativă a punctului în funcție de unghiul la centru θ, știind că la momentul inițial unghiul era θ_0 și viteza relativă zero. b) Care vor fi pozițiile de echilibru relativ stabil și perioadele micilor oscilații în jurul acestor poziții?

R. a) $v_{rel} = R\left[\omega^2(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0) + \frac{2g}{R}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right]^{1/2}$,

b) $\theta = \arccos\frac{-g}{\omega^2 R}$, $T = \frac{2\pi R\omega}{\sqrt{R^2\omega^4 - g^2}}$ dacă $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$,

$\theta = \pi$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g - \omega^2 R}}$ dacă $\omega \leqslant \sqrt{\frac{g}{R}}$.

10.6. Un mobil se mișcă cu o viteză relativă $\vec{v}_{rel} =$ const, față de Pămînt, în planul orizontal, la latitudinea φ. Ce mișcare absolută are mobilul, ținînd seama de rotația diurnă a Pămîntului?

R. Mișcare uniformă pe un cerc de rază $\frac{v_{rel}}{2\omega\sin\varphi}$ (presupusă $\leqslant R$ — raza Pămîntului) unde ω — viteza unghiulară a Pămîntului).

10.7. Un tub, curbat sub formă de cerc de rază R, se rotește într-un plan orizontal cu viteza unghiulară $\omega =$ const în jurul unui punct al său A. În interiorul tubului se mișcă liber fără frecare o bilă de masă m. Dacă θ este unghiul dintre raza vectoare a bilei dusă din centrul cercului O și raza OA, cunoscînd $v_{rel} = v_0$ pentru $\theta = \theta_0$, să se afle viteza relativă a bilei, reacțiunea orizontală a tubului și perioada micilor oscilații ale bilei în jurul poziției de echilibru relativ.

R. $v_{rel} = \sqrt{v_0^2 + 2R^2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$, $R_h = mR[(\omega + v_{rel}/R)^2 + \omega^2\cos\theta]$, $T = 2\pi/\omega$.

10.8. O particulă grea de masă m se mișcă liber fără frecare în planul zOx, care se rotește cu $\omega =$ const în jurul axei verticale fixe Oz. Să se scrie ecuațiile mișcării relative, știind condițiile inițiale (la $t = 0$): x_0, z_0 și $v_{rel} = 0$. Să se afle și reacțiunea planului care se rotește.

R. $x = x_0 \operatorname{ch}\omega t$, $z = z_0 - gt^2/2$, $R = 2mx_0\omega^2 \operatorname{sh}\omega t$.

CAPITOLUL 11
MECANICA RELATIVISTĂ

Teoria restrînsă a relativității (sau teoria relativității restrînse) a fost creată în esență de Albert Einstein în 1905.

11.1. POSTULATELE TEORIEI RELATIVITĂȚII

În 1863 J. C. Maxwell a formulat legile electromagnetismului și a dat teoria electromagnetică a luminii. Ecuațiile lui Maxwell nu sînt însă G-invariante, adică nu sînt invariante la transformările lui Galilei, deci legile fenomenelor electromagnetice și optice ar trebui să difere de la un SR inerțial la altul. Or, aceasta ar permite determinarea mișcării relative a SR inerțiale și evidențierea unui SR absolut, presupus legat de eterul cosmic, universal. Ceea ce n-a permis mecanica, ar permite optica. Dar, nenumăratele experiențe optice, de exemplu experiențele lui Michelson și Morley de la sfîrșitul secolului trecut, au arătat că nici prin mijloace optice nu se poate determina mișcarea unui SR inerțial. Astfel, s-a găsit că viteza luminii în vid este independentă de mișcarea inerțială a sursei sau a observatorului, deci aceeași față de diferite SR. Aceasta contrazice legea clasică de adunare a vitezelor, deci și transformările lui Galilei.

Contradicția ivită a fost rezolvată clar și precis în 1905 de către Albert Einstein (1879—1955) prin crearea teoriei relativității (TR). Pe baza rezultatelor experimentale, Einstein extinde principiul relativității al lui Galilei la întreaga fizică :

(I) *Toate legile fizicii, nu numai cele mecanice, sînt aceleași în toate SR inerțiale.*

Nici o experiență *fizică*, efectuată în interiorul unui sistem inerțial, nu ne permite să determinăm mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de alte SR inerțiale. Toate SR inerțiale sînt absolut echivalente din punct de vedere fizic ; nu există deci un spațiu absolut, care să poată fi luat drept SR absolut. Principiul relativității al lui Einstein constituie *primul* postulat al teoriei relativității.

(II) Cel de-al *doilea* postulat afirmă că *viteza maximă de propagare a interacțiunilor sau a energiei este* **finită,** *și* **aceeași** *în toate SR inerțiale* (în virtutea echivalenței lor), *deci o* **constantă universală a fizicii.** Această viteză absolută coincide cu viteza luminii în vid.

Pe aceste două postulate se bazează teoria restrînsă a relativității (TR).

Din al doilea postulat rezultă imediat *inexistența corpurilor absolut rigide*, deoarece cu o bară absolut rigidă, prin simplă împingere a ei, s-ar transmite instantaneu energie altui corp. De asemenea, al doilea postulat contrazice, după cum am spus, legea clasică de adunare a vitezelor, deci și transformările lui Galilei. Din cele două postulate se pot deduce acum noile transformări corecte, care coincid cu transformările lui Lorentz, deduse de acesta drept transformări care lasă invariante ecuațiile lui Maxwell ale electromagnetismului. Prin urmare, ecuațiile lui Maxwell sînt corecte. În schimb, legile mecanicii lui Newton, invariante la transformările lui Galilei, nu sînt exacte, la fel ca și aceste transformări.

11.2. TRANSFORMĂRILE LUI LORENTZ

Noile transformări trebuie să fie *liniare*, la fel ca și transformările lui Galilei. În adevăr, ecuațiile de grad mai înalt au mai multe soluții și atunci observațiile dintr-un SR s-ar interpreta neunivoc în alte SR, or trebuie să existe o corespondență biunivocă între coordonatele aceluiași eveniment, înregistrate în diferite SR. De asemenea, noile transformări trebuie să coincidă practic cu transformările lui Galilei pentru fenomenele mecanice obișnuite, unde se aplică cu mare precizie mecanica clasică.

Fie sistemele de coordonate alese ca în figura 11.1. Atunci coordonatele y și z nu sînt afectate de mișcarea reciprocă a sistemelor, fiind transversale pe direcția de mișcare, deci $y' = y$, $z' = z$.

În adevăr, fie $y' = ax + by + cz + dt$. Pentru un eveniment oarecare din planul Oxz avem $y = 0$ și $y' = 0$, deci $0 = ax + cz + dt$ pentru *oricare* x, z, t, ceea ce implică $a = c = d = 0$, deci $y' = by$. Sistemele fiind *echivalente*, trebuie să avem și reciproc : $y = by'$, adică $b^2 = 1$, $b = \pm 1$, și pentru aceeași orientare a axelor, $b = 1$. Judecînd analog pentru z', găsim $y' = y$, $z' = z$.

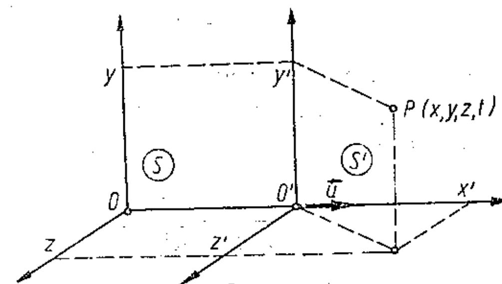


Fig. 11.1

Pentru coordonatele x', x trebuie să avem :

$$x' = \alpha(x - ut), \qquad (11.1)$$

unde α nu depinde de coordonate, ci eventual de viteza u de transport dintre cele două SR. În adevăr, relația trebuie să fie liniară și pentru punctele $x = ut$ din planul $O'y'z'$ trebuie să rezulte $x' = 0$ în S', deci polinomul liniar al lui x' trebuie să fie divizibil cu $x - ut$, adică să fie proporțional cu $x - ut$.

Analog, trebuie să avem :

$$x = \alpha(x' + ut'), \qquad (11.2)$$

deoarece pentru punctele $x' = -ut'$ din planul Oyz trebuie să rezulte $x = 0$ în S, deci polinomul lui x trebuie să fie proporțional cu $x' + ut'$.

Coeficientul α trebuie să fie același în virtutea echivalenței SR, altfel trecerea de la un SR la altul ar fi diferită și unul din ele s-ar evidenția, contrar postulatului I. Putem considera că S se mișcă cu viteza $-u$ față de S', atunci coordonatele din S vor fi considerate cu accent, iar cele din S' fără accent, deci trecerea inversă se obține din cea directă prin substituția $(x,\ t,\ u)\Leftrightarrow(x',\ t',-u)$:

$$x' = \alpha(x - ut) \Leftrightarrow x = \alpha(x' + ut').$$

În cazul transformărilor Galilei $\alpha = 1$.

Să folosim acum postulatul II pentru a afla pe α. Să presupunem că în momentul inițial cînd originile O, O' coincid, se emite un semnal luminos din origine în sensul axei comune Ox. Un punct oarecare în care ajunge semnalul are coordonata $x = ct$ în S și $x' = ct'$ în S', cu *aceeași* viteză c a luminii. Aplicînd transformările (11.1—2) pentru *acest* punct în care ajunge semnalul luminos, obținem:

$$ct' = \alpha(c - u)t, \quad ct = \alpha(c + u)t',$$

de unde, înmulțindu-le membru cu membru:

$$c^2 = \alpha^2(c^2 - u^2), \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c}, \tag{11.3}$$

deci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{11.4}$$

Introducînd prima relație în a doua, sau invers, obținem formulele pentru transformarea timpului:

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{11.5}$$

Reunind rezultatele, avem următoarele *transformări Lorentz*, care dau trecerea de la un SR inerțial la altul care se mișcă față de primul cu viteza constantă u de-a lungul axei comune Ox:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\\ y' &= y,\ z' = z, & y &= y',\ z = z',\\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Transformările lui Galilei se obțin de aici ca un caz limită cînd $c \to \infty$, sau, aproximativ, cînd $u \ll c$ ($\beta = u/c \ll 1$), neglijînd puterile superioare ale lui $\beta = u/c$.

Conform postulatului I, *toate ecuațiile fizicii trebuie să fie invariante la transformările lui Lorentz*, pe scurt, *Lorentz-invariante* sau *L-invariante*.

Mecanica clasică este invariantă la transformările Galilei și nu la transformările Lorentz, de aceea nu este exactă pentru mișcări cu viteze comparabile cu viteza luminii și trebuie înlocuită cu mecanica relativistă.

11.3. CONTRACȚIA LUNGIMILOR

Un același corp are dimensiuni în general diferite dacă sînt măsurate în SR diferite. În adevăr, fie o riglă în repaus în S de-a lungul axei Ox, avînd lungimea $l_0 = x_2 - x_1$ (diferența absciselor capetelor riglei). Lungimea riglei măsurată în S' va fi dată tot de diferența absciselor capetelor riglei, *luate în același moment* t' *în* S':

$$\begin{aligned} l = (x_2' - x_1')|_{t'} &= (x_2\sqrt{1 - u^2/c^2} - ut') - (x_1\sqrt{1 - u^2/c^2} - ut') =\\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2} < l_0, \end{aligned} \tag{11.7}$$

deci lungimea riglei măsurată în SR față de care ea se mișcă (longitudinal) este mai mică, decît măsurată în SR față de care ea este în repaus.

Reciproc, fie acum o riglă în repaus în S' de-a lungul axei $O'x'$, avînd lungimea $l_0 = x_2' - x_1'$ în S'. Lungimea riglei în S, față de care ea se mișcă cu viteza u, va fi dată de diferența absciselor capetelor ei, măsurate în *același moment* t *în* S:

$$\begin{aligned} l = (x_2 - x_1)|_t &= (x_2'\sqrt{1 - u^2/c^2} + ut) - (x_1'\sqrt{1 - u^2/c^2} + ut) =\\ &= (x_2' - x_1')\sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \end{aligned}$$

adică același rezultat:

lungimea riglei măsurată în SR propriu (față de care rigla este în repaus) este maximă.

Numai dimensiunile *longitudinale* față de direcția mișcării sînt diferite în SR diferite, cele transversale pe direcția mișcării sînt aceleași ($y' = y$, $z' = z$), de aceea volumul corpului apare contractat în același raport, de exemplu, elementul de volum dV:

$$dV = dV_0\sqrt{1 - \beta^2}. \tag{11.8}$$

Un corp sferic în SC propriu apare turtit în direcția mișcării în SR față de care el se mișcă.

11.4. DILATAREA DURATELOR

Fie acum într-un punct de abscisă x în S un proces care durează $\tau_0 = t_2 - t_1$, de exemplu, două indicații succesive ale unui ceasornic aflat în acel punct sau timpul de viață al unei particule elementare. Durata acelu-

iași proces, măsurată în S', este dată de diferența momentelor corespunzătoare în S' considerate pentru *aceeași abscisă* x:

$$\tau = (t_2' - t_1')|_x = \frac{t_2 - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{t_1 - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} =$$

$$= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} > \tau_0, \qquad (11.9)$$

deci durata unui proces într-un punct aflat în mișcare față de SR considerat este mai mare decît durata aceluiași proces măsurată în SR față de care acel punct este în repaus.

Reciproc, fie acum un proces într-un punct x' în S' care durează $\tau_0 = t_2' - t_1'$ în S'. În S durata aceluiași proces va fi dată de diferența momentelor corespunzătoare în S considerate pentru același x':

$$\tau = (t_2 - t_1)|_{x'} = \frac{t_2' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{t_1' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} =$$

$$= \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} > \tau_0,$$

adică același rezultat:

durata indicată de un ceasornic este minimă în SC propriu (față de care ceasornicul este în repaus).

Din (11.8) și (11.9) rezultă că produsul $\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t$ este invariant relativist:

$$\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}V_0\sqrt{1 - \beta^2}\cdot\mathrm{d}t_0/\sqrt{1 - \beta^2} = \mathrm{d}V_0\,\mathrm{d}t_0. \qquad (11.10)$$

Din transformările Lorentz rezultă *caracterul relativ al simultaneității*: două evenimente simultane în S, (x_1, t) și (x_2, t), de exemplu capetele unei rigle ca mai sus, nu mai sînt simultane în S':

$$t_1' = \frac{t - ux_1/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \neq t_2' = \frac{t - ux_2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \ (x_1 \neq x_2). \qquad (11.11)$$

Viteza limită sau viteza maximă c, egală cu viteza luminii în vid, nu poate fi depășită. Altfel, transformările Lorentz ar deveni imaginare și ar pierde sens fizic: coordonatele evenimentelor în noul reper S' ar deveni imaginare! Pe de altă parte, cînd $u \to c$, dimensiunile longitudinale ale corpurilor tind către zero (pentru $u > c$, devin imaginare !), spațiul tridimensional degenerează într-un spațiu bidimensional, devine un plan perpendicular pe direcția mișcării. Duratele proceselor tind către infinit (pentru $u > c$, devin imaginare !) cu alte cuvinte orice proces încetează (secunda durează o eternitate) dinamica degenerează în statică.

11.5. COMPUNEREA VITEZELOR

Diferențiind transformările lui Lorentz și împărțind primele trei ecuații obținute la ultima, avem:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + u\,\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}y', \ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z', \ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + u\,\mathrm{d}x'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + u\,\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + u\,\mathrm{d}x'/c^2} \ \text{sau} \ v_x = \frac{v_x' + u}{1 + v_x'u/c^2}, \qquad (11.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\mathrm{d}t' + u\,\mathrm{d}x'/c^2}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\mathrm{d}t' + u\,\mathrm{d}x'/c^2} \ \text{sau}$$

$$v_y = \frac{v_y'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x'u/c^2}, \quad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x'u/c^2}$$

și formulele inverse (se obțin mutînd accentele și schimbînd pe u în $-u$):

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - v_xu/c^2}, \quad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - v_xu/c^2}, \quad v_z' = \frac{v_z\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - v_xu/c^2}. \qquad (11.13)$$

Reamintim că S' se mișcă cu viteza u față de S de-a lungul axei comune Ox ca în figura 11.1 ($\vec{v}'$ — viteza relativă, $\vec{u}$ — viteza de transport, $\vec{v}$ — viteza absolută). Față de legea clasică newtoniană de compunere a vitezelor, în legea relativistă apare numitorul $1 + v_x'u/c^2$, iar la componentele transversale apare la numărător radicalul Lorentz.

În cazul limită $c \to \infty$ sau pentru $u \ll c$, neglijînd β^2, obținem formulele clasice newtoniene de compunere a vitezelor.

Formulele relativiste de compunere a vitezelor ne arată de asemenea că *viteza c nu poate fi depășită*. De exemplu, dacă compunem două viteze de aceeași direcție și sens (Ox), egale cu $3c/4$, obținem:

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + v_x'u/c^2} = \frac{3c/4 + 3c/4}{1 + 9/16} = \frac{24}{25}c < c.$$

Dacă una din viteze este egală cu c, rezultatul este tot c, adică viteza luminii este aceeași în toate SR (inerțiale):

$$v_x = \frac{c + u}{1 + cu/c^2} = c, \ v_x = \frac{c + c}{1 + c\cdot c/c^2} = c.$$

Conform formulelor clasice newtoniene ar fi trebuit să obținem, respectiv:

$$v_x = v_x' + u = 3c/4 + 3c/4 = 3c/2 > c,$$

$$v_x = c + u > c, \ v_x = c + c = 2c,$$

în contradicție cu experiența (de exemplu, experiențele lui Michelson și Morley).

11.6. SPAȚIUL MINKOWSKI

Introducem un spațiu cu 4 dimensiuni E_4 : trei dimensiuni spațiale (x, y, z) și una temporală (ct). Un eveniment se reprezintă printr-un punct în acest spațiu, avînd coordonatele :

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct, \tag{11.14}$$

unde pentru omogenizarea dimensiunilor, timpul t se înmulțește cu constanta universală c. Transformările Lorentz reprezintă o transformare a coordonatelor evenimentelor sau punctelor din acest spațiu E_4.

11.6.1. CUADRIINTERVALELE

Fie un semnal luminos care pleacă din punctul (x_1, y_1, z_1) la momentul t_1 și sosește în punctul (x_2, y_2, z_2) la momentul t_2, atunci distanța parcursă de semnal este egală cu viteza luminii ori timp :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{11.15}$$

Trecînd la S', adică aplicînd transformările Lorentz, găsim :

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = c^2(t_2' - t_1')^2, \tag{11.16}$$

ceea ce se poate scrie și direct în baza postulatului II al constanței vitezei luminii. Prin urmare, expresia pătratică :

$$s^2 \overset{\text{def}}{=} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \tag{11.17}$$

este Lorentz-invariantă și nulă pentru propagarea luminii, s se numește *cuadriinterval*. Pentru două evenimente oarecare cuadriintervalul s (11.17) nu este nul, dar rămîne L-*invariant*.

$$s = s' = \text{inv}, \tag{11.18}$$

ceea ce se poate verifica imediat. Cuadriintervalul dintre două evenimente joacă rolul *distanței* dintre punctele reprezentative corespunzătoare în spațiul cuadridimensional al evenimentelor E_4, adică definește *metrica* acestui spațiu. Cuadridistanța (11.17) diferă de distanța obișnuită dintr-un spațiu 4-dimensional euclidian doar prin semnul minus al ultimului pătrat (timpul rămîne calitativ diferit de spațiu !), de aceea spațiul introdus se numește spațiu *pseudoeuclidian* (metrică pseudoeuclidiană) ; geometria sa diferă de geometria euclidiană. De exemplu, pentru distanța dintre două puncte aflate în planul Oxt $(y_1 = y_2 = 0,\ z_1 = z_2 = 0)$ (fig. 11.2) avem :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2,$$

adică pătratul ipotenuzei este egal cu *diferența* pătratelor catetelor și nu cu suma lor ca în planul euclidian.

Există puncte (evenimente) distincte între care 4-distanța este nulă anume punctele (evenimentele) legate prin propagarea luminii (11.16).

Analog rotațiilor dintr-un spațiu euclidian, care lasă invariantă distanța, tot astfel *transformările Lorentz reprezintă o pseudorotație în spațiul-timp relativist pseudoeuclidian E_4, care lasă invariant cuadriintervalul* : $s = s'$. Transformările Lorentz particulare (11.6) reprezintă o pseudorotație în planul spațio-temporal (x, t).

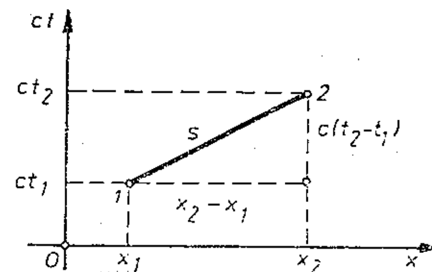


Fig. 11.2

În mecanica clasică avem doi invarianți la transformările Galilei ; distanța spațială și distanța temporală dintre două evenimente. În locul lor, în TR avem un singur invariant la transformările Lorentz : cuadriintervalul s (11.17), dar mai avem o viteză absolută c. Existența acestei constante universale a fizicii permite unificarea invariantă a spațiului și timpului, și invarianța cuadriintervalului dovedește interconexiunea dintre spațiu și timp În această unificare timpul și spațiul se disting calitativ prin signatura metricii, adică prin semnele $+ + + -$ în expresia intervalului. Un alt L-invariant din acest spațiu este elementul de cuadrivolum (hipervolum) $dV\,dt$, conform lui (11.10).

11.6.2. CLASIFICAREA CUADRIINTERVALELOR

Un interval s real, adică

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 > 0, \tag{11.19}$$

se numește interval de tip *spațial*. Două evenimente separate printr-un interval de tip spațial sînt absolut separate spațial sau absolut independente și nu pot fi legate cauzal între ele, deoarece nici un semnal nu le poate uni, viteza necesară fiind supraluminoasă, conform lui (11.19) :

$$\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} > c^2.$$

Nu există un SR în care cele două evenimente să apară în același loc, deoarece ar trebui ca în noul SR să avem :

$$s'^2 = -c^2(t_2' - t_1')^2 = s^2 > 0,$$

ceea ce este imposibil, dar există în schimb un SR în care cele două evenimente să fie *simultane* ; atunci :

$$s'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = s^2 > 0.$$

Un interval s imaginar, adică

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 < 0 \tag{11.20}$$

se numește interval de tip *temporal*.

Două evenimente separate printr-un interval de tip temporal sînt absolut separate temporal sau în succesiune temporală absolută și pot fi legate cauzal între ele.

Nu există un SR în care cele două evenimente să fie simultane deoarece ar trebui ca în noul SR să avem :

$$s'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = s^2 < 0,$$

ceea ce este imposibil, dar există în schimb un SR în care cele două evenimente să se producă în același loc ; atunci :

$$s'^2 = -c^2(t_2' - t_1')^2 = s^2 < 0.$$

De exemplu, cuadriintervalul pentru două poziții succesive ale unei particule, care se mișcă cu viteza v este ($dl = v\,dt$)

$$ds^2 = dl^2 - c^2\,dt^2 = (v^2 - c^2)\,dt^2 < 0, \qquad (11.21)$$

deci este totdeauna de tip temporal.

În reperul propriu al particulei $ds^2 = -c^2\,dt_0^2$ și din (11.21) rezultă

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

în concordanță cu dilatarea duratelor (11.9) (t — timpul cosmic, t_0 — timpul propriu).

În sfîrșit, intervalul s este nul pentru două evenimente legate prin propagarea luminii.

11.6.3. HIPERCONUL LUMINOS

Evenimentele separate de evenimentul-origine prin interval nul verifică condiția

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0, \qquad (11.22)$$

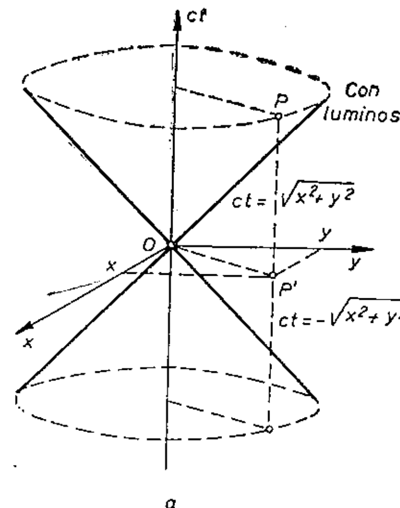
adică în spațiul obișnuit sînt punctele de pe sfera de rază $r = ct$, cu centrul în origine, adică unda sferică luminoasă care se propagă. În spațiul Minkowski, (11.22) reprezintă un hipercon, numit *con luminos* (sau izotrop). Luînd pentru simplificare doar două axe spațiale x, y, obținem conul din figura 11.3, *a* ; luînd o singură axă spațială x, obținem două drepte secante (bisectoarele cadranelor) din figura 11.3, *b*.

Hiperconul luminos dus prin origine împarte cuadrispațiul evenimentelor în două regiuni :

1) *viitorul absolut* și *trecutul absolut* formate din evenimentele din interiorul conului, separate de evenimentul-origine printr-un interval de tip temporal $s^2 < 0$, cu $t > 0$, respectiv $t < 0$; aceste evenimente pot fi legate cauzal de evenimentul-origine și succesiunea lor temporală față de evenimentul-origine (posterior-anterior), este absolută, adică nu poate fi inversată (aceeași în toate SR) ;

2) evenimentele *absolut depărtate*, situate în exteriorul conului și separate de evenimentul-origine printr-un interval de tip spațial $s^2 > 0$; aceste evenimente nu pot fi legate cauzal de evenimentul-origine și succesiunea lor temporală față de evenimentul-origine este relativă, adică poate fi inversată față de diferite SR.

Mișcarea unei particule se reprezintă în cuadrispațiu printr-o linie numită *linie de univers*, situată mereu în interiorul pînzelor superioare ale conurilor luminoase duse în punctele succesive ale liniei, deci înclinată sub un



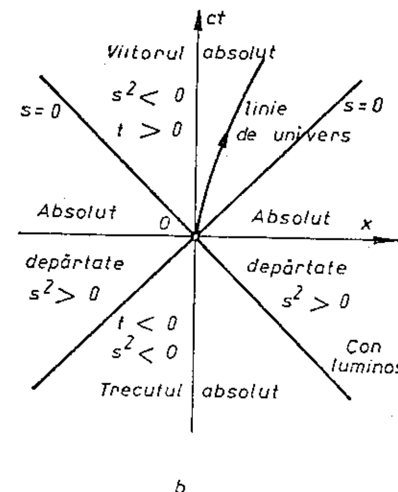


Fig. 11.3

unghi mai mic de 45° față de axa ct, deoarece $v < c$ ($v/c < 1$), adică ds este de tip temporal : $ds^2 < 0$ (11.21). Pentru o particulă în repaus linia de univers este paralelă cu axa ct.

11.7. IMPULSUL ȘI MASA

După cum am văzut, ecuațiile mecanicii clasice newtoniene sînt G-invariante, de exemplu, legea conservării impulsului unui sistem izolat este valabilă în mecanica clasică în orice SR inerțial dacă aplicăm transformările lui Galilei. Deoarece în TR viteza se transformă altfel decît în mecanica clasică newtoniană, dacă am considera masa independentă de SR, legea conservării impulsului *definit prin* $m\vec{v}$ n-ar fi L-invariantă, adică n-ar fi valabilă în orice SR inerțial.

Prin urmare, dacă păstrăm definiția impulsului (cantității de mișcare) ca *produsul dintre masă și viteză*, $m\vec{v}$, și cerem valabilitatea legii conservării impulsului pentru sisteme izolate în orice SR inerțial conform *transformărilor Lorentz*, trebuie să admitem că masa depinde de SR față de care o măsurăm, analog lungimilor și duratelor. Masa corpului măsurată în SR propriu, adică în SC legat rigid de corp, față de care corpul este în repaus, se numește *masa de repaus* m_0, atunci față de alte SR masa va fi diferită, dependentă de viteza corpului față de acele SR. Masa de mișcare trebuie să depindă de modulul vitezei, altfel SR n-ar fi echivalente și s-ar evidenția o direcție privilegiată.

Putem găsi legea variației masei cu viteza considerînd un exemplu de ciocnire perfect elastică a două bile identice. Dacă două bile identice se mișcă înainte de ciocnire cu viteze egale în modul și de sens opus, impulsurile lor vor fi egale în modul și de sens opus, deci impulsul total va fi nul. Atunci și după ciocnire impulsul total trebuie să fie nul, adică și după ciocnire impulsu-

rile bilelor trebuie să fie egale în modul şi de sens opus. Din condiţia ciocnirii perfect elastice rezultă că impulsul fiecărui corp în parte nu se schimbă în valoare absolută prin ciocnire, adică masa şi viteza în modul a fiecărui corp în parte (bilele fiind identice) nu se schimbă prin ciocnire (fig. 11.4). În acest caz energia cinetică (dependentă de masă şi viteză) a fiecărui corp în parte

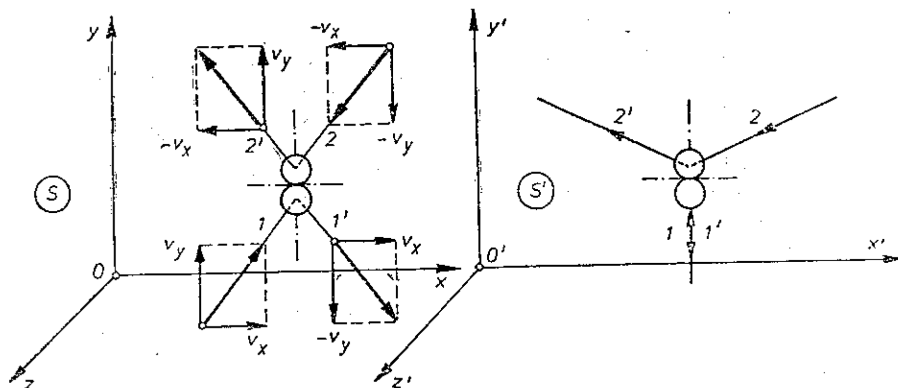


Fig. 11.4

nu se schimbă prin ciocnire, adică este respectată condiţia de conservare a energiei cinetice în ciocniri perfect elastice.

Alegînd sistemele de referinţă ca în figura 11.4 (v_x nu se schimbă, v_y schimbă semnul prin ciocnire), cerem respectarea legii de conservare a impulsului şi în S' care se mişcă cu viteza $u = v_x$. Atunci vitezele bilelor în S', înainte şi după ciocnire se calculează uşor cu ajutorul formulelor de compunere a vitezelor (11.13) ;

	Înainte de ciocnire	După ciocnire
Bila 1	$0,\ \frac{v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}$	$0,\ -\frac{v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}$
Bila 2	$\frac{-2v_x}{1+v_x^2/c^2},\ \frac{-v_y\sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2}$	$\frac{-2v_x}{1+v_x^2/c^2},\ \frac{v_y\sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2}$

Conservarea impulsului pe direcţia Ox este automat verificată pentru fiecare bilă în parte. Pe direcţia Oy trebuie să avem :

$$\frac{m_1 v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} - \frac{m_2 v_y\sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2} = -\frac{m_1 v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} + \frac{m_2 v_y\sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2}$$

sau

$$m_2 = m_1 \frac{1+v_x^2/c^2}{1-v_x^2/c^2}, \tag{11.23}$$

de unde se vede că masele de mişcare ale celor două bile nu sînt egale, deoarece au viteze diferite. Relaţia (11.23) fiind valabilă pentru orice v_x, v_y, la limită cînd $v_y \to 0$, m_1 va deveni masa de repaus m_0 (în S'), iar m_v va corespunde vitezei de mişcare $v = 2v_x/(1 + v_x^2/c^2)$, astfel încît obţinem din (11.23) formula variaţiei masei cu viteza :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.24}$$

şi impulsul (cantitatea de mişcare) :

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{11.25}$$

Cînd $v \to c$, masa şi impulsul tind către infinit (pentru $v > c$, ele devin imaginare !). Masa este minimă în SC propriu.

11.8. FORŢA

Prin urmare, impulsul unui sistem izolat se conservă. Atunci variaţia impulsului se datoreşte forţei aplicate :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m\vec{a} + \frac{m(\vec{v}\,\vec{a})}{c^2-v^2}\vec{v} =$$

$$= m\vec{a} + \frac{mv^2/c^2}{1-v^2/c^2}\vec{a}_t, \tag{11.26}$$

deci în general forţa nu este coliniară cu acceleraţia. Pentru $c \to \infty$, ultimul termen tinde către zero şi regăsim ecuaţia clasică. Descompunînd acceleraţia în cele două componente, avem :

$$\vec{F} = m\vec{a}_n + \frac{m}{1-v^2/c^2}\vec{a}_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{a}_n + \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\vec{a}_t = \vec{F}_n + \vec{F}_t. \tag{11.27}$$

Prin urmare, pe direcţia *normală*, de exemplu în mişcarea circulară uniformă, putem scrie $F = ma$, unde m este (11.24).

Dacă particula are viteze relativiste (apropiate de viteza luminii) atunci forţa $\vec{F}$ aplicată particulei produce o acceleraţie mai mică decît în cazul clasic şi deviată spre normala la traiectorie, deci acceleraţia nu mai este riguros coliniară cu forţa (este din ce în ce mai greu de modificat modulul vitezei în comparaţie cu direcţia vitezei) (fig. 11.5).

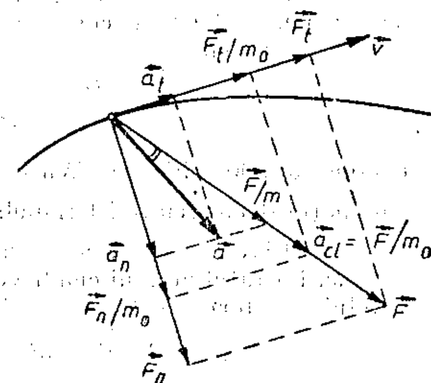


Fig. 11.5

11.9. ENERGIA

Lucrul mecanic al forței aplicate punctului material trebuie să fie egal cu variația energiei cinetice a punctului material, deci

$$dW = \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}\,dt = \frac{d(m\vec{v})}{dt}\vec{v}\,dt = d(m\vec{v})\vec{v} =$$

$$= v^2 dm + m\vec{v}\,d\vec{v} = v^2\,dm + mv\,dv,$$

dar din (11.24) avem

$$dm = \frac{mv\,dv}{c^2 - v^2} = \frac{m\vec{v}\,d\vec{v}}{c^2 - v^2}, \qquad (11.28)$$

astfel încît,

$$dW = v^2\,dm + (c^2 - v^2)\,dm = c^2\,dm = dE_c, \qquad (11.29)$$

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2, \qquad (11.30)$$

unde $E_0 = m_0c^2$ este energia de repaus, iar $E = mc^2$ este energia totală. În cazul vitezelor mici, $v/c \ll 1$, (11.30) devine:

$$E_c = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right) - m_0c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2, \qquad (11.31)$$

adică se obține în prima aproximație expresia clasică a energiei cinetice.

O serie întreagă de considerații teoretice și de experiențe (de exemplu, emisia și absorbția radiației electromagnetice, reacțiile nucleare) arată că *proporționalitatea dintre masă și energie este universal valabilă* (pentru orice fel de energii):

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (11.32)$$

(cînd $v \to c$, $E \to \infty$, iar pentru $v > c$, E devine imaginar). Prin urmare, orice variație de energie este însoțită de o variație corespunzătoare a masei, și reciproc.

Legea conservării energiei este și lege a conservării masei.

De exemplu, dacă un corp absoarbe o cantitate de căldură $Q = 1$ J, masa lui crește cu

$$m = \frac{Q}{c^2} = \frac{1\ \text{J}}{9\cdot 10^{16}\,\text{m}^2/\text{s}^2} \approx 10^{-17}\ \text{kg}.$$

O energie de 500 miliarde kWh corespunde unei mase de 20 kg.

În spațiul-timp relativist impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$ și energia $E = mc^2$ se unifică într-un cuadrivector: trei componente spațiale $\vec{p}$ și componenta a patra: $E/c = mc$. Pătratul acestui cuadrivector se calculează ca și pătratul cuadriintervalului, conform metricii spațiului-timp:

$$p^2 - E^2/c^2 = p^2 - m^2c^2 = -m_0^2c^2 = \text{inv.} \qquad (11.33)$$

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}, \qquad (11.34)$$

în locul formulei clasice $E = p^2/2m$. Pentru particule cu masa de repaus nulă (foton, neutrino):

$$E = pc, \quad (m_0 = 0). \qquad (11.35)$$

Tot astfel se unifică toate mărimile fizice în cuadrivectori sau, în general, în tensori (de exemplu, cîmpul electromagnetic).

Teoria relativității a fost strălucit verificată experimental. Astfel, expresia relativistă a impulsului și variația masei cu viteza se verifică la particulele elementare accelerate la viteze mari. Masa unui electron accelerat pînă la o energie de 30 MeV crește de 60 ori ($m_ec^2 = 0{,}511$ MeV), iar masa unui proton accelerat pînă la 50 GeV crește de peste 50 de ori ($m_pc^2 = 938{,}2$ MeV).

Dilatarea duratelor se verifică în calculul timpilor de viață ale mezonilor în SC de laborator față de SC propriu. Relația dintre masă și energie se verifică în toate reacțiile nucleare și în toate transformările reciproce ale particulelor elementare. Astfel, un foton se poate transforma într-o pereche electron-pozitron, numai dacă energia sa $h\nu$ este cel puțin egală cu masa de repaus a celor două particule $2\,m_0c^2$:

$$h\nu > 2m_0c^2 = 2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot 9\cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}64\cdot 10^{-13}\ \text{J} = 1{,}022\ \text{MeV},$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} < \frac{h}{2m_0c} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot 3\cdot 10^8\ \text{m/s}} =$$

$$= 1{,}21\cdot 10^{-12}\ \text{m} = 1{,}21\cdot 10^{-2}\ \text{Å}.$$

Astăzi este în plină creație o teorie *cuantică relativistă* a cîmpurilor și particulelor elementare.

PROBLEME

11.1. La momentul $t = 0$ se emite din originea comună a sistemelor S, S' un semnal luminos în toate direcțiile. După un timp t, observatorul din S constată că frontul de undă reprezintă o sferă cu centrul în originea O a sistemului *său* de referință S, de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = c^2t^2$. Ce constată celălalt observator?

R. Constată același lucru: frontul de undă reprezintă o sferă cu centrul în originea O' a sistemului său de referință S', de ecuație: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 = c^2t'^2$ (invarianța cuadriintervalului!).

11.2. Să se arate că transformările Lorentz se pot scrie sub forma:

$$x = x'\,\text{ch}\,\psi + ct'\,\text{sh}\,\psi, \quad ct = x'\,\text{sh}\,\psi + ct'\,\text{ch}\,\psi,$$

unde $\text{th}\,\psi = u/c$.

Dacă notăm $\text{th}\,\varphi = v/c$, $\text{th}\,\varphi' = v'/c$, atunci legea de compunere a vitezelor (11.12) devine: $\varphi = \varphi' + \psi$.

11.3. Mezonii $\pi^{\pm}$ generați în laborator au un timp de viață $\tau_0 = 2{,}6\cdot 10^{-8}$ s. Se constată experimental că mezonii $\pi^{\pm}$ născuți la înălțimi mari, $h = 10 \div 20$ km, ajung totuși la suprafața Pămîntului, deși s-ar părea că nu pot parcurge o distanță mai mare decît $s_{max} = \tau_0 c = 7{,}8$ m. Să se explice acest fapt.

R. Dilatarea duratelor pentru observatorul terestru din SL sau contracția lungimilor pentru SR propriu al mezonilor.

11.4. Cu cît crește masa de repaus $m_0 = 1{,}00$ t a unui satelit care iese din cîmpul gravitațional terestru?

R. $\Delta m = m_0 gR/c^2 \cong 0{,}7\,mg$, ($R$ — raza Pămîntului).

11.5. O particulă în repaus de masă m_2 este lovită de o altă particulă cu masa de repaus m_1 și viteza v_1, pe care o absoarbe. Să se afle masa de repaus m' și viteza v' a particulei compuse rezultante.

R. $m' = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2/\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}, \quad v' = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$

11.6. O particulă în repaus de masă m fisionează în două particule de mase de repaus m_1, m_2. Să se afle energiile totale E_1, E_2 ale celor două particule rezultante.

R. $E_1 = \dfrac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}c^2, \quad E_2 = \dfrac{m^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m}c^2.$

11.7. În sistemul S' o particulă se mișcă în planul $O'x'y'$ cu viteza $\vec{v}'$ sub unghiul θ' față de axa $O'x'$. Care va fi unghiul respectiv θ al vitezei $\vec{v}$ în S?

R. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{v'\sqrt{1 - u^2/c^2}\cdot\sin\theta'}{v'\cos\theta' + u}$. În particular, pentru propagarea luminii (aberația luminii): $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c + \cos\theta'}\sin\theta'$, de unde pentru unghiul de aberație $\Delta\theta = \theta' - \theta \cong \cong \dfrac{u}{c}\sin\theta'$.

11.8. Să se scrie formulele de transformare pentru cuadrivectorul impuls $p^i = (\vec{p}, E/c)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

R. $p_x = \dfrac{p_x' + uE'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z', \quad E = \dfrac{E' + up_x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$

11.9. Cuadrivectorul viteză este $u^i \overset{\text{def}}{=} \dfrac{dx^i}{dt_0} = ic\dfrac{dx^i}{ds} = \left(\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \dfrac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, (t_0, timpul propriu). Să se arate că cuadrivectorul impuls $p^i = m_0u^i$. Să se calculeze pătratul (în E_4) cuadrivectorului viteză.

R. $-c^2$.

11.10. Cuadrivectorul accelerație este $a^i \overset{\text{def}}{=} \dfrac{du^i}{dt_0} = ic\dfrac{du^i}{ds} = -c^2\dfrac{d^2x^i}{ds^2} = \dfrac{d^2x^i}{dt_0^2}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Să se arate că el este „perpendicular" (în E_4) pe cuadrivectorul viteză u^i.

11.11. Cuadrivectorul forță este $f^i \overset{\text{def}}{=} \dfrac{dp^i}{dt_0} = ic\dfrac{dp^i}{ds} = im_0c\dfrac{du^i}{ds} = m_0\dfrac{du^i}{dt_0} = m_0a^i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Să se arate că $f^i = \left(\dfrac{\vec{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \dfrac{\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$ și că el este „perpendicular" (în E_4) pe cuadrivectorul viteză.

11.12. Un mezon μ se mișcă în SL cu viteza v și a parcurs o distanță s de la generarea sa pînă la dezintegrarea sa. Să se calculeze durata de viață proprie și distanța parcursă „din punct de vedere al mezonului".

R. $\tau_0 = \dfrac{s}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad s_0 = s\sqrt{1 - v^2/c^2}.$

11.13. O particulă cu masa de repaus m_0 pleacă din repaus sub acțiunea unei forțe constante F. Să se exprime în funcție de timp, viteza și coordonata.

R. $v = \dfrac{Fct}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}}, \quad x = \dfrac{c}{F}\left[\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2} - m_0c\right].$

11.14. O particulă de sarcină q și masă de repaus m_0 descrie un cerc de rază R într-un cîmp magnetic uniform B. Care este viteza particulei?

R. $v = \dfrac{c}{\sqrt{1 + (m_0c/qrB)^2}}.$

11.15. Un foton se transformă într-o pereche electron-pozitron, care într-un cîmp de inducție magnetică $\vec{B}$, transversal, au razele de curbură ale traiectoriilor R. Care a fost lungimea de undă a fotonului?

R. $\lambda = \dfrac{h}{2\sqrt{m_0^2c^2 + e^2B^2R^2}}.$

11.16. Un mezon π în repaus se dezintegrează astfel: $\pi \to \mu + \tilde{\nu}$. Care este energia cinetică a mezonului μ format?. Se cunosc masele de repaus m_π, m_μ.

R. $E_\mu = \dfrac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}, \quad E_{c\mu} = \dfrac{(m_\pi - m_\mu)^2c^2}{2m_\pi}.$

11.17. Să se găsească legea vitezei și legea mișcării relativiste uniform accelerate pentru o particulă care se mișcă cu accelerația a_0, constantă în SC propriu.

R. $v = \dfrac{a_0t}{\sqrt{1 + a_0^2t^2/c^2}}, \quad x = \dfrac{c^2}{a_0}\left(\sqrt{1 + a_0^2t^2/c^2} - 1\right),$

timpul propriu $t_0 = \dfrac{c}{a_0}\operatorname{arc\,sh}(a_0t/c)$.

11.18. Două particule au vitezele $\vec{v}_{1,2}$ în SL. Viteza relativă a particulei 1 față de particula 2 este viteza ei în SCM a particulei 2. Să se afle modulul vitezei relative.

R. $v_{rel}^2 = \dfrac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2/c^2}{(1 - \vec{v}_1\vec{v}_2/c^2)^2}.$

11.19. O particulă, aflată în repaus, cu masa M se dezintegrează în trei particule cu masele de repaus $m_{1,2,3}$. Să se afle energia maximă pe care o poate prelua una din cele trei particule.

R. De exemplu, $E_{1,\,max} = \dfrac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}c^2.$

CAPITOLUL 12

MECANICA SOLIDULUI ELASTIC

Un model mai fidel al corpurilor reale este modelul *solidului elastic*, care ţine seama de deformaţiile corpurilor (valabil pentru deformaţii nu prea mari).

12.1. TENSIUNILE ŞI DEFORMAŢIILE

Orice corp din natură este mai mult sau mai puţin deformabil. Sub acţiunea forţelor exterioare, în interiorul corpului apar *tensiuni interne*, datorită deformării corpului. Atomii sau ionii care formează corpul se deplasează puţin din poziţiile lor de echilibru; atunci forţele de interacţiune (de legătură) dintre ei se opun acestei deplasări ca forţe interne.

Deformaţiile care dispar după suprimarea forţelor care le-au produs, se numesc *elastice*; cele care nu dispar se numesc *plastice*.

Pentru deformaţii elastice nu prea mari este valabilă legea experimentală a lui Robert Hooke (1635—1703), descoperită în 1660 şi publicată în 1676, după care *deformaţiile elastice sînt proporţionale cu tensiunile şi reciproc*.

Vom considera mai jos numai corpurile *omogene* (aceleaşi proprietăţi fizice în toate punctele corpului — invarianţa la *translaţii*) şi *izotrope* (aceleaşi proprietăţi fizice în toate direcţiile — invarianţa la *rotaţii*). Astfel sînt materialele policristaline (de exemplu, metalele), formate din microcristale orientate haotic.

Deformaţiile elastice se împart în patru categorii simple: a) întindere (tracţiune) sau comprimare (compresiune), b) forfecare (lunecare), c) flexiune (încovoiere) şi d) torsiune (răsucire).

Frecvent aceste tipuri simple se suprapun (coexistă).

12.2. TRACŢIUNEA (ÎNTINDEREA) BAREI

12.2.1. TENSIUNI ŞI DEFORMAŢII

Fie o bară de lungime iniţială (nedeformată) l_0 şi secţiune transversală iniţială (nedeformată) S_0 supusă la o forţă de întindere F (fig. 12.1). Dacă reprezentăm grafic *tensiunea elastică* (*efortul unitar*) $\sigma \overset{\text{def}}{=} F/S_0$ în funcţie de *deformaţie* (*alungire relativă*) $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \Delta l/l_0$, obţinem curba experimentală din figura 12.1, care este asemenea (proporţională) cu curba forţei de tracţiune F în funcţie de alungirea barei $\Delta l = l - l_0$.

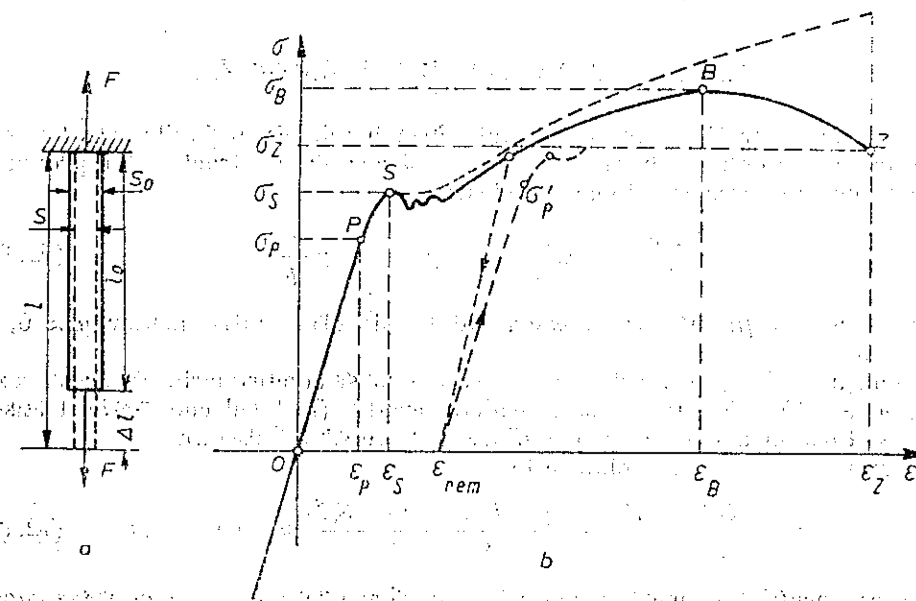


Fig. 12.1

Porţiunea rectilinie OP reprezintă legea lui Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \text{ sau } \frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta l}{l_0} = E\frac{l - l_0}{l_0}, \tag{12.1}$$

$$[E] = \frac{[F]}{[S]} = 1 \text{ N/m}^2 \text{ în SI}, \tag{12.2}$$

unde E este *modulul de elasticitate* la tracţiune (Young) ($E \approx 2 \cdot 10^{11}$ N/m² la metale). Punctul P (ε_P, σ_P) reprezintă *limita de proporţionalitate* (limita domeniului Hooke). Deformaţiile elastice se întind însă de obicei ceva mai departe de limita de proporţionalitate, pînă la *limita de elasticitate*, după care începe domeniul deformaţiilor plastice.

Punctul critic $S(\varepsilon_S, \sigma_S)$ reprezintă *limita de curgere sau de fluiditate*. Dincolo de această limită deformaţiile cresc neregulat fără vreo solicitare suplimentară; materialul „curge"; este regiunea de prelucrare plastică a metalelor.

Mai departe, după terminarea curgerii, tensiunea creşte din nou o dată cu deformarea, pînă la *limita de rezistenţă* $B(\varepsilon_B, \sigma_B)$ cînd începe o gîtuire pronunţată a barei într-un anumit loc şi ruperea ei, corespunzătoare *punctului de rupere* Z (ε_Z, σ_Z).

Dacă am raporta forţa de tracţiune F nu la secţiunea iniţială S_0, ci la secţiunea reală S (care se micşorează fiindcă bara se subţiază), atunci am obţine o curbă monoton crescătoare (punctată).

Dacă înlăturăm forța de întindere într-un punct din regiunea deformațiilor plastice, corpul rămîne cu o deformație remanentă ε_{rem}. La o nouă experimentare a probei se constată că limita de proporționalitate crește: $\sigma_p' > \sigma_p$. Acesta este fenomenul de *întărire* a materialului prin prelucrarea sa (deformare plastică) la rece.

12.2.2. CONTRACȚIA TRANSVERSALĂ

Experiența arată că în timpul întinderii barei, dimensiunile sale transversale se micșorează; bara se contractă și această contracție este proporțională cu alungirea (în domeniul elastic):

$$\frac{\Delta b}{b_0} = -\mu\frac{\Delta l}{l_0} = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}, \tag{12.3}$$

unde μ este *coeficientul lui Poisson* (adimensional) (pentru metale $\mu \approx 0{,}3$ sau $1/3$).

Relații analoage celor de mai sus se aplică și comprimării. În acest caz $\varepsilon < 0 (\Delta l < 0)$, $\Delta b > 0$ și σ se consideră negativ (în locul contracției transversale Poisson avem acum o umflare transversală Poisson).

Variația relativă de volum este

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{S_0(1-\mu\varepsilon)^2 l_0(1+\varepsilon) - S_0 l_0}{S_0 l_0} \cong \varepsilon(1-2\mu), \tag{12.4}$$

unde am neglijat termenii superiori în ε, deoarece $\varepsilon \ll 1$. Vom vedea mai jos că totdeauna $1 - 2\mu > 0$, astfel încît volumul crește prin tracțiune ($\varepsilon > 0$), respectiv scade prin comprimare ($\varepsilon < 0$).

12.2.3. LUCRUL MECANIC

Este efectuat de forța aplicată și „înmagazinat" în bară sub formă de energie potențială de deformare:

$$W = \int_{l_0}^{l} F\,dl = \int_0^{\Delta l} \sigma S_0\, d(l-l_0) = \int_0^{\varepsilon} \sigma S_0 l_0\, d\frac{l-l_0}{l_0} = S_0 l_0 \int_0^{\varepsilon} \sigma\, d\varepsilon$$

sau raportat la volumul inițial *nedeformat*:

$$\frac{W}{V_0} = \int_0^{\varepsilon} \sigma\, d\varepsilon. \tag{12.5}$$

Pe graficul $\sigma - \varepsilon$ acest lucru mecanic pe unitatea de volum sau *densitatea de energie* potențială este dat(ă) de aria mărginită de curba tensiunii elastice, axa deformațiilor elastice și ordonata deformației finale ε.

În domeniul elastic este valabilă legea lui Hooke $\sigma = E\varepsilon$, astfel încît integrarea dă energia elastică pe unitatea de volum:

$$\frac{W}{V_0} = \int_0^{\varepsilon} \sigma\, d\varepsilon = E\int_0^{\varepsilon} \varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}. \tag{12.6}$$

Prin urmare, în fiecare unitate de volum a corpului se „înmagazinează", atît la întindere cît și la comprimare, o energie potențială proporțională cu pătratul deformației elastice sau cu pătratul tensiunii elastice.

În practică, atîta timp cît ne restrîngem la domeniul *elastic*, unde deformațiile sînt *mici* ($\varepsilon < 1\%$), putem scrie $\sigma = F/S$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ etc., neglijînd puterile superioare mici ale deformației ε.

Întinderea sau comprimarea barei dă deformații omogene, adică toate fibrele longitudinale ale barei sînt deformate identic. În cazul *încovoierii* unei bare avem deformații *neomogene*: fibrele interioare (spre concavitate) sînt comprimate, în timp ce fibrele exterioare (spre convexitate) sînt întinse, și există fibre neutre de lungime neschimbată.

12.3. COMPRESIBILITATEA

12.3.1. ÎNTINDEREA (SAU COMPRIMAREA) UNUI PARALELIPIPED

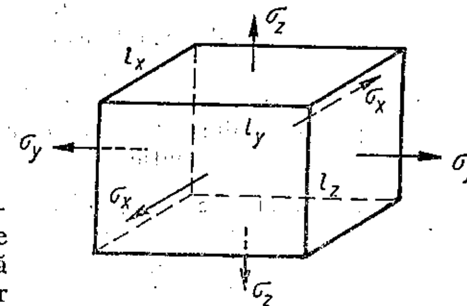


Fig. 12.2

Fie un paralelipiped supus întinderii sau comprimării pe toate fețele sale (fig. 12.2). Deformația rezultantă este o suprapunere a deformațiilor generate separat și independent de cele 3 solicitări pe cele 3 direcții perpendiculare (deformații presupuse *mici*) (principiul suprapunerii valabil în aproximația liniară). Ca urmare a solicitării σ pe o direcție, rezultă o alungire σ/E pe acea direcție și o contracție transversală Poisson $-\mu\sigma/E$ pe celelalte două direcții perpendiculare (transversale) astfel încît pentru cele 3 solicitări rezultă următorul tablou al deformațiilor:

Tabloul deformațiilor elastice ε

σ \ Axa	Ox	Oy	Oz
σ_x	σ_x/E	$-\mu\sigma_x/E$	$-\mu\sigma_x/E$
σ_y	$-\mu\sigma_y/E$	σ_y/E	$-\mu\sigma_y/E$
σ_z	$-\mu\sigma_z/E$	$-\mu\sigma_z/E$	σ_z/E

Prin însumare, găsim deformațiile rezultante pe fiecare direcție:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_{0x}} = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_{0y}} = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_{0z}} = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}. \tag{12.7}$$

Deformațiile fiind considerate mici, le putem asimila cu diferențialele, astfel încît pentru variația de volum avem:

$$V = l_x l_y l_z, \quad \ln V = \ln l_x + \ln l_y + \ln l_z,$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dl_x}{l_x} + \frac{dl_y}{l_y} + \frac{dl_z}{l_z} \rightarrow \varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta l_x}{l_{0x}} + \frac{\Delta l_y}{l_{0y}} + \frac{\Delta l_z}{l_{0z}}.$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{12.8}$$

Deformația elastică (relativă) a volumului, ε_V, se poate obține și astfel: Din (12.7) avem

$$\Delta l_x = \varepsilon_x l_{0x} \text{ sau } l_x - l_{0x} = \varepsilon_x l_{0x} \text{ sau } l_x = (1+\varepsilon_x) l_{0x},$$

de aceea volumul deformat este

$$V = l_x l_y l_z = l_{0x} l_{0y} l_{0z}(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z).$$

Deoarece în domeniul elastic deformațiile sînt mici ($\varepsilon \sim 1\%$ sau $\varepsilon \ll 1$), avem în primă aproximație:

$$V = V_0(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) \approx V_0(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z),$$

de unde

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

adică formula precedentă (12.8).

12.3.2. COMPRESIUNEA UNIFORMĂ. COMPRESIBILITATEA

În cazul comprimării *uniforme* de tip *hidrostatic* a unui corp, se definește *coeficientul de compresiune* (sau de compresibilitate) prin relația:

$$\langle \varkappa \rangle = -\frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta p}, \quad \varkappa \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial p}, \tag{12.9}$$

adică $\varkappa$ este numeric egal cu descreșterea unității de volum la o creștere egală cu unitatea a presiunii.

Experiența arată că totdeauna la o creștere a presiunii volumul scade, deci $\varkappa > 0$.

Inversul lui $\varkappa$ se numește *modulul de compresiune*:

$$K = \frac{1}{\varkappa} \overset{\text{def}}{=} -V_0\frac{\partial p}{\partial V}. \tag{12.10}$$

Formulele (12.7—8) dau în acest caz ($\Delta p > 0$ înseamnă o comprimare, deci $\sigma < 0$, adică $\sigma = -\Delta p$):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma = -\Delta p; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon = -\frac{1-2\mu}{E}\Delta p, \tag{12.11}$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = 3\varepsilon = -3\frac{1-2\mu}{E}\Delta p = -\varkappa\cdot\Delta p, \tag{12.12}$$

$$\varkappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}, \quad K = \frac{1}{\varkappa} = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \tag{12.13}$$

Cum $\varkappa > 0$, rezultă $1 - 2\mu > 0$, deci totdeauna $\mu < 0{,}5$.

La metale $K \cong 1{,}5\cdot10^{11}$ N/m², la apă $\cong 2\cdot10^9$ N/m², la mercur $\cong 2{,}6\cdot10^{10}$ N/m².

Energia elastică „înmagazinată" prin deformare, pe unitatea de volum (densitatea de energie) este:

$$\frac{W}{V_0} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \varepsilon_z\sigma_z) = \frac{1}{2}\varepsilon_V\sigma = \frac{1}{2}K\varepsilon_V^2 = \frac{(\Delta p)^2}{2K}. \tag{12.14}$$

12.3.3. DEFORMAȚIE UNIDIMENSIONALĂ

Să considerăm acum întinderea unei bare, prinsă lateral atît de rigid, încît dimensiunile transversale nu se pot schimba (de exemplu, comprimările și rarefierile în unda sonoră care se propagă într-un mediu elastic nemărginit, nu pot produce contracția sau umflarea transversală Poisson). Datorită reacțiunii pereților laterali, care împiedică umflarea (sau contracția) transversală a barei, în bară apar tensiuni elastice transversale a căror mărime se determină din condiția ca dimensiunile transversale să nu se schimbe.

Fie deci tensiunea σ_x în direcția axei Ox, atunci trebuie să avem:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0,$$

de unde

$$\sigma_y + \sigma_z = \frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_x, \tag{12.15}$$

iar pentru deformația longitudinală ε_x rezultă:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E(1-\mu)}\sigma_x =$$

$$= \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\sigma_x = \frac{1}{E'}\sigma_x \tag{12.16}$$

sau

$$\sigma_x = E'\varepsilon_x, \quad \text{unde } E' = E\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{12.17}$$

Pentru $\mu \approx 0{,}3$ (metale), avem aproximativ $E' \simeq 1{,}35\,E$.

Vom folosi acest rezultat la studiul propagării sunetului în medii elastice nemărginite.

12.4. FORFECAREA (SAU LUNECAREA)

În cazul întinderii sau comprimării variază volumul corpului (12.4). Există deformații în care *volumul rămîne constant*, schimbîndu-se numai forma.

12.4.1. FORFECAREA SAU LUNECAREA

Aceasta este deformarea în care unele straturi lunecă peste altele. Dacă aplicăm două cupluri de forțe la două perechi de fețe opuse ale unui paralelipiped (fig. 12.3), straturile se vor deplasa unele față de altele. Pentru deformații mici, experiența dă o proporționalitate între unghiul γ (în rad) și efortul tangențial $\tau = F/S_0$:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \text{tg}\,\gamma \approx \gamma = \frac{\tau}{G},$$

$$\tau = G\gamma \text{ (legea Hooke)}; \quad (12.18)$$

$$[G] = 1\ \text{N/m}^2 \text{ în SI}, \quad (12.19)$$

unde G se numește *modulul de lunecare sau de forfecare.*

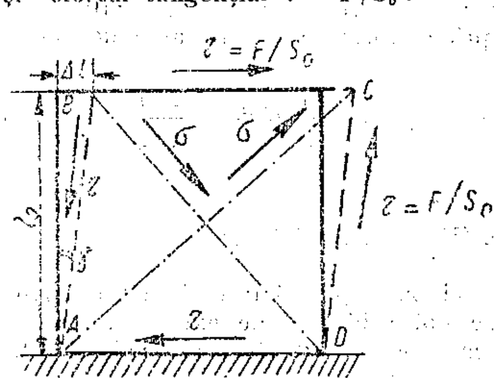


Fig. 12.3

12.4.2. LEGĂTURA CU ELASTICITATEA LA TRACȚIUNE

Deformația de forfecare este echivalentă cu întinderea fibrelor paralele cu diagonala AC și comprimarea fibrelor paralele cu cealaltă diagonală BD. Tensiunea de întindere și cea de comprimare sînt egale respectiv cu $\pm\tau$, deoarece proiecția celor două forțe F pe direcția AC sau BD dă $\pm 2F\cos 45° = \pm F\sqrt{2}$, iar aria secțiunii diagonale la care sînt raportate este $S_0\sqrt{2}$, de unde $\sigma = \pm F\sqrt{2}/S_0\sqrt{2} = \pm\tau$.

Alungirea diagonalei AC sau comprimarea diagonalei BD sînt egale cu $\varepsilon = \pm\gamma/2$, deoarece alungirea sau comprimarea absolută a diagonalei este $\pm\Delta l\cos 45° = \pm\Delta l/\sqrt{2}$, iar lungimea diagonalei, la care trebuie raportată alungirea este $l_0\sqrt{2}$, de unde $\varepsilon = \pm\Delta l/2l_0 = \pm\gamma/2$. Dar deformația de alungire a diagonalei AC, $\varepsilon = \gamma/2$, se compune din deformația de alungire $\sigma/E = \tau/E$ datorită întinderii ei cu tensiunea $\sigma = \tau$ și din umflarea Poisson $\mu\tau/E$ datorită comprimării transversale $\sigma = -\tau$ pe direcția BD :

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E} + \frac{\mu\tau}{E} = (1+\mu)\frac{\tau}{E} \quad (12.20)$$

și cum $\gamma = \tau/G$, rezultă

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (12.21)$$

(pentru materiale obișnuite, $G \approx 0{,}4\,E$).

Deformația de forfecare apare la tăierea tablei, la solicitarea niturilor etc. (fig. 12.4).

Deformația de lunecare de mai sus este omogenă. O deformație de lunecare *neomogenă* este răsucirea sau *torsiunea* unei tije sau fir.

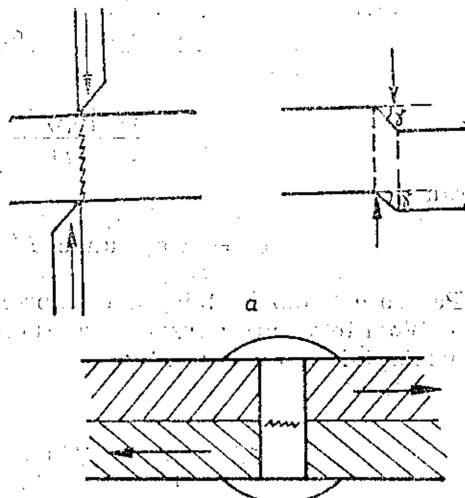


Fig. 12.4

Prin urmare, proprietățile elastice ale unui solid *izotrop* sînt caracterizate numai de *două* constante elastice independente, de exemplu, E și G. În cazul corpurilor *anizotrope* însă (cristalele) sînt necesare mai multe constante : de la 3 la cristalele cubice, pînă la 21 la cristalele triclinice.

12.5. ÎNCOVOIEREA (FLEXIUNEA)

12.5.1. FORȚE INTERNE

Vom studia încovoierea barelor, considerînd că dimensiunile lor transversale sînt mici față de lungimea lor, iar deformațiile sînt mici și rămîn în domeniul elastic (legea Hooke). Presupunem de asemenea că toate forțele sînt verticale și acționează în planul de simetrie vertical, longitudinal, al barei. Atunci în orice secțiune a barei forțele interne se reduc la o *forță transversală* (*tăietoare*) Q și la un *moment încovoietor* (*cuplu*) M.

În adevăr, să secționăm bara la distanța x de capătul său stîng A și să îndepărtăm partea din dreapta. Deoarece partea stîngă a fost și este în echilibru, înseamnă că partea dreaptă a acționat asupra celei stîngi prin forțe interne în secțiunea S, care se reduc la o rezultantă Q aplicată în centrul secțiunii S și un cuplu M.

Desigur că și reciproc, conform principiului III al forțelor reciproce partea stîngă acționează asupra celei drepte în aceeași secțiune S printr-o forță și un cuplu de sensuri *opuse*.

Din condițiile de echilibru pentru oricare parte a barei rezultă :

Forța transversală (*tăietoare*) Q *și cuplul* (*momentul încovoietor*) M *dintr-o secțiune S a barei reprezintă rezultanta și momentul rezultant față de centrul secțiunii S al forțelor externe aplicate părții drepte a barei* (sau minus rezultanta și minus momentul rezultant al forțelor externe aplicate părții stîngi a barei).

(Evident, se poate face o altă convenție schimbînd rolul părților.)

12.5.2. FORȚA TĂIETOARE ȘI MOMENTUL ÎNCOVOIETOR

Alegem axele ca în figura 12.5. Să izolăm un element dx din bară, supus numai la forțe distribuite continuu q (forța pe unitatea de lungime a barei)

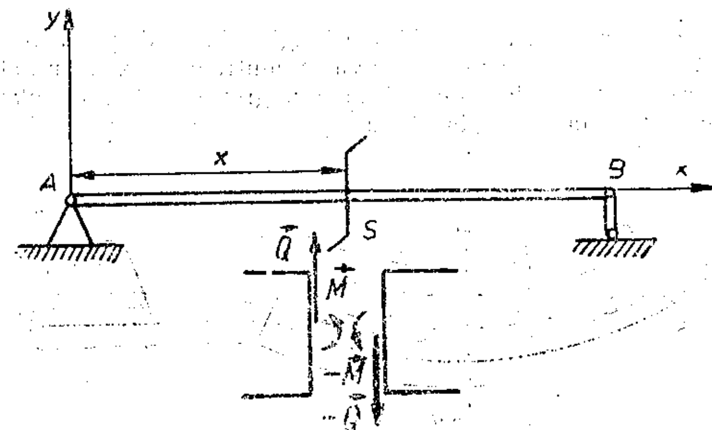


Fig. 12.5

(fig. 12.6). Din condiția de echilibru pentru rezultantă (pe axa Oy) rezultă:

$$-Q + q\,dx + Q + dQ = 0, \quad \text{de unde} \quad \frac{dQ}{dx} = -q. \tag{12.22}$$

Derivata forței transversale (tăietoare) Q în raport cu abscisa x este egală cu minus densitatea liniară q a forței distribuite.

Din condiția de echilibru pentru momente (M este considerat pozitiv în sens *trigonometric!*) rezultă (luînd momentele față de secțiunea stîngă):

Fig. 12.6

$$-M + (Q + dQ)\,dx + q\,dx\frac{dx}{2} + M + dM = 0,$$

de unde, neglijind termenii infinitezimali superiori (care se anulează):

$$\frac{dM}{dx} = -Q. \tag{12.23}$$

Derivata momentului încovoietor M în raport cu abscisa x este egală cu forța transversală (tăietoare) cu semn schimbat $-Q$.

Evident, formulele (12.22—23) nu se aplică pentru secțiunile unde lucrează forțe externe și momente externe *concentrate* (acolo derivatele sînt discontinue).

Din (12.22—23) rezultă:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dQ}{dx} = q. \tag{12.24}$$

12.5.3. DEFORMAȚII ȘI TENSIUNI

Prin încovoierea unei bare fibrele longitudinale de pe partea convexă se alungesc, iar cele de pe partea concavă se contractă. Există un strat în care fibrele doar se curbează dar nu-și schimbă lungimea — *stratul neutru* (fig. 12.7). Intersecția sa cu planul secțiunii transversale dă *axa neutră* (Oz).

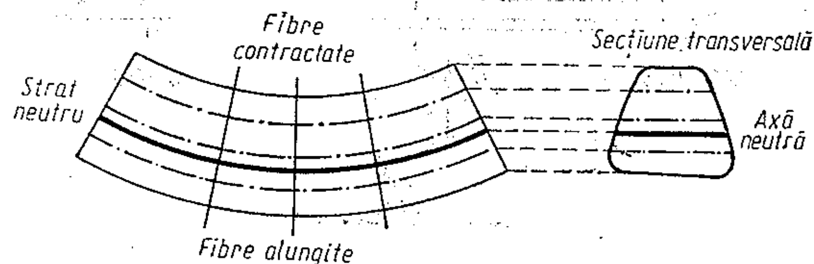


Fig. 12.7

Secțiunile transversale, plane înainte de deformație, rămîn plane și după deformație, ele doar se rotesc în jurul axei neutre rămînînd perpendiculare pe stratul neutru (ipoteza lui Bernoulli).

Să calculăm deformația unei fibre situate la distanța y de stratul neutru (fig. 12.18). Fie R — raza de curbură a stratului neutru, atunci $dx = Rd\theta$

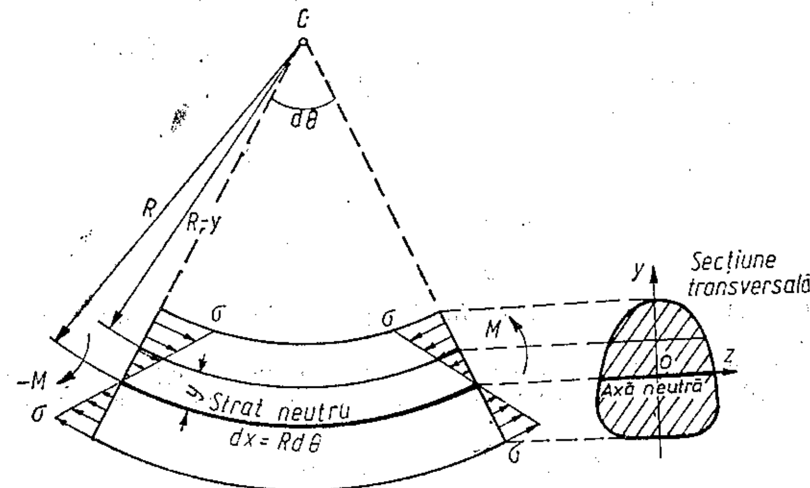


Fig. 12.8

și alungirea va fi $(R - y)d\theta - Rd\theta = -y\,d\theta$. Raportînd-o la lungimea inițială nedeformată $dx = Rd\theta$, obținem deformația elastică:

$$\varepsilon = -\frac{y}{R}. \tag{12.25}$$

Deformațiile fibrelor sînt direct proporționale cu distanțele lor pînă la stratul neutru.

Aplicînd legea lui Hooke, găsim tensiunea elastică

$$\sigma = E\varepsilon = -E\frac{y}{R}. \tag{12.26}$$

În stratul neutru ($y = 0$) tensiunile normale σ sînt nule.

12.5.4. MOMENTUL DE INERȚIE GEOMETRIC

Pe direcția longitudinală Ox tensiunile elastice care acționează într-o secțiune transversală (Oyz) trebuie să dea forța rezultantă nulă (am presupus că toate forțele externe sînt verticale):

$$\int \sigma\,dS = 0, \quad -\int E\frac{y}{R}\,dS = 0, \quad \int y\,dS = 0$$

sau ordonata y_0 a „centrului de greutate" al secțiunii:

$$y_0 = \frac{1}{A}\int y\,dS = 0, \tag{12.27}$$

(A — aria secțiunii transversale), ceea ce înseamnă că *axa neutră trece prin „centrul de greutate" al secțiunii.*

Cum forțele elementare normale $\sigma\, dS$ aplicate secțiunii transversale au rezultanta nulă (12.27), ele dau un *cuplu* rezultant al cărui moment este chiar momentul încovoietor (fig. 12.9):

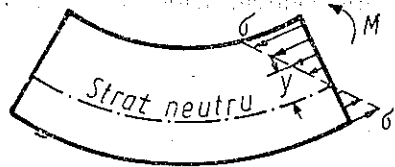


Fig. 12.9

$$-\int \sigma\, dSy = M, \quad \int \frac{Ey^2}{R}\, dS = M,$$

$$M = \frac{EJ}{R}, \qquad (12.28)$$

$$J \overset{\text{def}}{=} \int y^2\, dS, \quad [J] = m^4, \qquad (12.29)$$

unde J se numește *momentul de inerție* **geometric** *al secțiunii* față de axa neutră.

Momentele de inerție geometrice se calculează analog celor fizice I. În figura 12.10 sînt date cîteva secțiuni cu momentele lor de inerție geometrice;

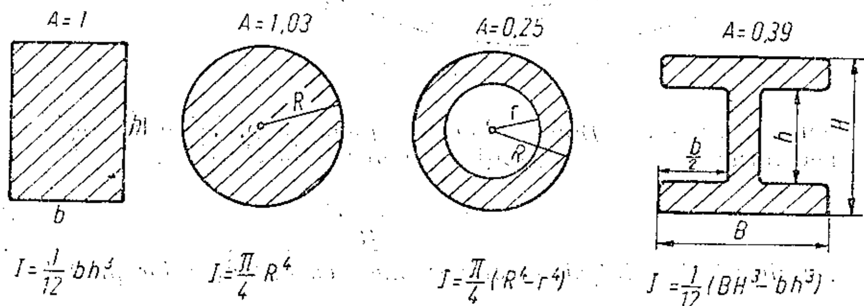


Fig. 12.10

pentru momente de inerție egale sînt comparate ariile lor A; din punctul de vedere al economiei de material, secțiunea mai economică este cea inelară.

12.5.5. ECUAȚIA LINIEI ELASTICE

Sub acțiunea forțelor aplicate axa barei se curbează, fiindcă centrele secțiunilor transversale se deplasează, iar secțiunile însele se rotesc în jurul axelor lor neutre. Vom presupune deplasări *mici*.

Axa barei ia, prin încovoiere, forma unei curbe plane numită *linie elastică*.

Raza de curbură a stratului neutru, deci și a liniei elastice, este dată de (12.28). Pe de altă parte, din matematică se cunoaște expresia curburii unei curbe plane:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{y''}{[1+y'^2]^{3/2}} \approx \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \qquad (12.30)$$

unde am neglijat $dy/dx = \operatorname{tg}\theta \approx \theta \ll 1$, considerînd că unghiul de încovoiere este mic.

Prin urmare *ecuația diferențială a liniei elastice este*

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M. \qquad (12.31)$$

Prin integrare obținem ecuația liniei elastice $y = f(x)$ în care vor apărea două constante de integrare, care se determină din condițiile la limită (margine).

12.5.6. BARĂ INCASTRATĂ

Presupunem la capătul barei o forță verticală P. Momentul încovoietor într-o secțiune x este (fig. 12.11):

$$M = -P(l - x).$$

Atunci (12.31) dă ecuația diferențială:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = P(x - l),$$

de unde

$$EJ\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Px^2 - Plx + C.$$

Pentru $x = 0$ avem $\theta = 0$, $dy/dx = 0$, deci $C = 0$.

$$EJy = \frac{1}{6}Px^3 - \frac{1}{2}Plx^2 + C'.$$

Pentru $x = 0$ avem $y = 0$, deci $C' = 0$. Ecuația axei barei devine

$$EJy = \frac{1}{2}Px^2\left(\frac{x}{3} - l\right), \qquad (12.32)$$

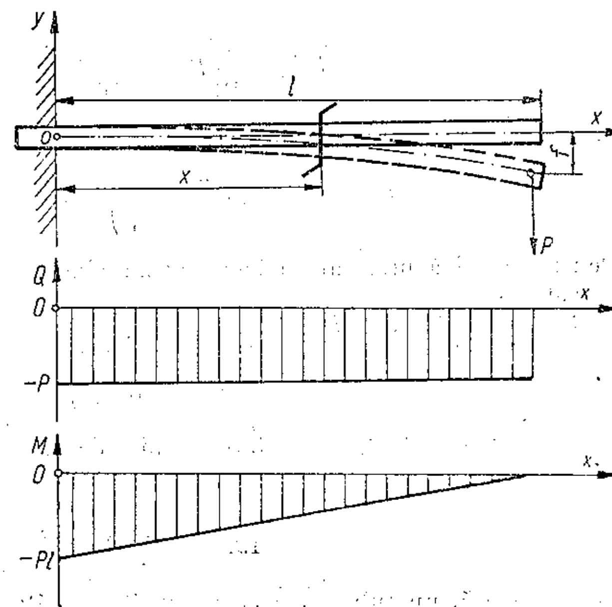


Fig. 12.11

de unde săgeata

$$f = -\frac{Pl^3}{3EJ}. \qquad (12.33)$$

12.5.7. BARA SPRIJINITĂ LA CAPETE

Presupunem la mijlocul barei o forță verticală P (fig. 12.12), atunci momentul încovoietor:

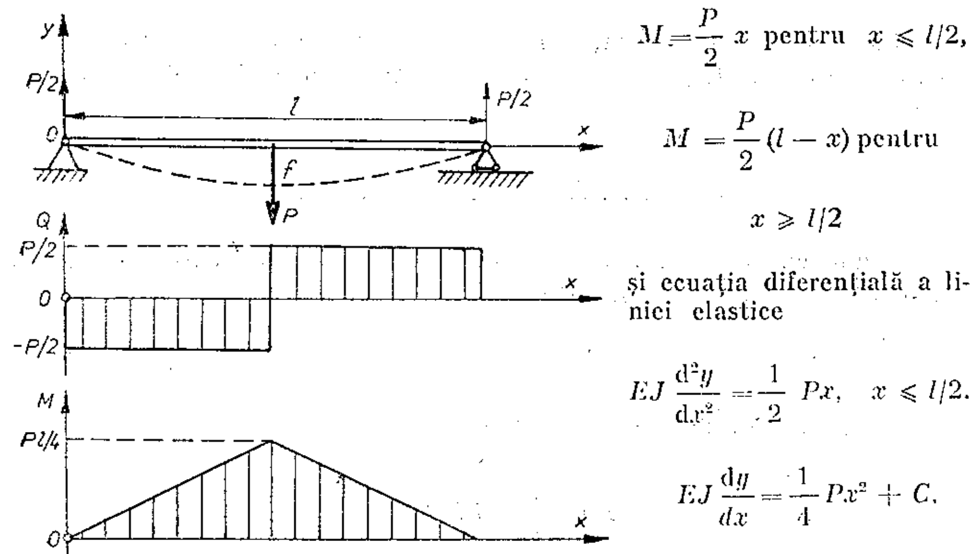


Fig. 12.12

$$M = \frac{P}{2}x \text{ pentru } x \leqslant l/2,$$

$$M = \frac{P}{2}(l-x) \text{ pentru } x \geqslant l/2$$

și ecuația diferențială a liniei elastice

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}Px, \quad x \leqslant l/2.$$

$$EJ\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}Px^2 + C,$$

dar pentru $x = l/2$, $y' = 0$, deci $C = -Pl^2/16$;

$$EJy = \frac{1}{12}Px^3 - \frac{1}{16}Pl^2x + C',$$

dar pentru $x = 0$, $y = 0$, deci $C' = 0$,

$$EJy = \frac{1}{4}Px\left(\frac{x^2}{3} - \frac{l^2}{4}\right), \text{ pentru } x \leqslant l/2. \qquad (12.34)$$

Pentru cealaltă jumătate a barei curba elastică este evident simetrică cu aceasta.

Săgeata este ($x = l/2$):

$$f = -\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ}. \qquad (12.35)$$

Formulele (12.33) și (12.35) permit, de exemplu, calculul modulului E.

12.6. TORSIUNEA

Fie o tijă, un tub sau un fir răsucit (fig. 12.13). Baza superioară a suferit o lunecare față de baza inferioară, dreapta AB s-a rotit în poziția AB', unghiul γ fiind unghiul de lunecare la distanța r de axă:

$$\frac{BB'}{AB} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{r\theta}{l}. \qquad (12.36)$$

Acestei lunecări îi corespunde o tensiune tangențială

$$\tau = G\gamma = Gr\theta/l. \qquad (12.37)$$

Forța corespunzătoare dF aplicată ariei elementare dS va fi $dF = \tau dS$ și momentul ei față de axă:

$$dM = r dF = G\frac{\theta}{l}r^2 dS.$$

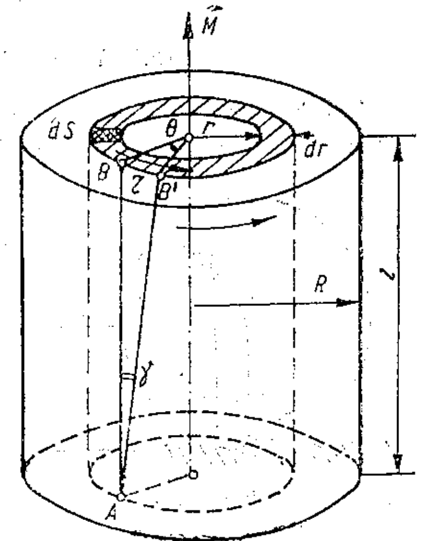


Fig. 12.13

Momentul de torsiune total, aplicat bazei superioare rezultă de aici prin integrare:

$$M = \frac{G}{l}\theta\int r^2 dS = \frac{GJ_p}{l}\theta = C\theta, \qquad (12.38)$$

$$J_p \overset{\text{def}}{=} \int r^2 dS, \qquad (12.39)$$

$$C = \frac{GJ_p}{l}, \quad [C] = 1\ \text{N·m/rad}, \qquad (12.40)$$

unde J_p este momentul de inerție geometric *polar* al secțunii, iar C *constanta de torsiune.*

Pentru un tub cilindric de raze R, r:

$$J_p = \int_r^R r^2 \cdot 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4), \qquad (12.41)$$

în particular, pentru un fir sau tijă cilindrică:

$$J_p = \frac{\pi}{2}R^4, \quad C = \frac{\pi}{2l}GR^4. \qquad (12.42)$$

Momentul de torsiune aplicat este proporțional cu unghiul de răsucire, iar *constanta de torsiune este proporțională cu puterea a 4-a a razei firului.*

Lucrul mecanic efectuat la răsucire va fi

$$W = \int M d\theta = \frac{1}{2}C\theta^2 = \frac{1}{2}M\theta = \frac{M^2}{2C}. \qquad (12.43)$$

Dacă printr-un arbore se transmite o putere P, atunci unghiul de răsucire a arborelui va fi

$$\theta = \frac{M}{C} = \frac{P}{C\omega} = \frac{P}{\omega}\frac{2l}{\pi G}\frac{1}{R^4}. \qquad (12.44)$$

Răsucirea unui fir este folosită în *balanța de torsiune* pentru măsurarea momentului unui cuplu de forțe foarte slab, de exemplu, în experiențele lui Cavendish. Se folosesc fire subțiri de cuarț de 1—100 μm, iar unghiul de răsucire se măsoară cu ajutorul deplasării unui spot luminos reflectat de o oglindă foarte mică fixată pe fir. Sensibilitatea este extrem de mare.

12.7. FRECAREA LA ROSTOGOLIRE

O bilă foarte dură (de exemplu, din sticlă), lansată de-a lungul unui plan orizontal dur (de exemplu, tot din sticlă) se rostogolește mult timp aproape uniform. Dacă bila ar fi perfect dură și planul orizontal perfect dur și n-ar exista frecarea cu aerul, bila s-ar rostogoli la nesfîrșit rectiliniu uniform, deoarece nu apare nici un cuplu de frînare.

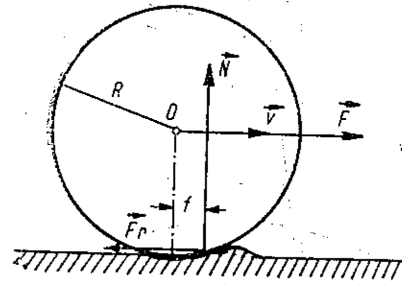


Fig. 12.14

În realitate, și bila și planul *se deformează*, în fața bilei se formează continuu un „val" (vizibil, de exemplu, la rostogolirea unui tăvălug greu peste o bucată de cauciuc moale) și punctul de aplicație al rezultantei N a forțelor de reacțiune normale se deplasează puțin *înainte* cu distanța f, dînd un moment de frînare (fig. 12.14). Totodată apare o forță tangențială de frecare la *rostogolire* F_r care se opune lunecării.

Pe măsură ce forța de tracțiune $\vec{F}$ crește, se deplasează înainte și forța de reacțiune normală $\vec{N}$ pînă cînd corpul pornește, după care această deplasare f rămîne practic constantă. O putem găsi din condiția de rostogolire *uniformă*:

$$F - F_r = 0, \quad F_r R - Nf = 0, \quad f = R\frac{F_r}{N}, \quad [f] = 1 \text{ m} \qquad (12.45)$$

și reciproc, *forța de frecare la rostogolire*

$$F_r = f\frac{N}{R}, \text{ (legea lui Coulomb)}, \qquad (12.46)$$

unde f se numește *coeficient de frecare la rostogolire* (el este de obicei de ordinul unui milimetru). Se vede că forța de frecare la rostogolire F_r este proporțională cu apăsarea normală, ca și forța de frecare la lunecare F_f, dar este mult mai mică. De exemplu, la o roată de camion cu raza $R = 0{,}50$ m, pe teren dur:

$$F_f = \mu N, \quad F_r = \frac{f}{R} N,$$

$$F_f/F_r = \mu R/f = 0{,}4 \cdot 0{,}50 : (4 \cdot 10^{-3}) = 50,$$

iar pentru roțile de tren: $F_f/F_r \approx 2\,000$.

Dacă corpul se rostogolește liber pe un plan orizontal ($N = G$):

$$F_r = f\frac{G}{R}\,\frac{1}{1 + I/mR^2}. \qquad (12.47)$$

Coeficienții de frecare la rostogolire

Roată de fier pe cale ferată	$3 \cdot 10^{-5}$ m
Roată de fier pe asfalt	$1 \cdot 10^{-3}$ m
Cauciuc pe teren dur	$4 \cdot 10^{-3}$ m

PROBLEME

12.1. O bară omogenă subțire de lungime l și masă m se rotește uniform cu viteza unghiulară ω într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix (fig. 12.15). Să se afle tensiunea elastică

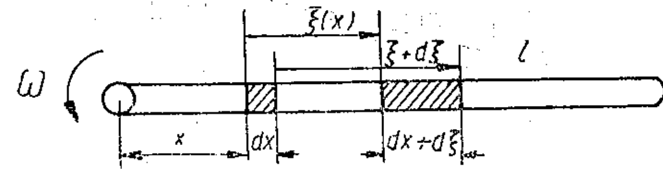


Fig. 12.15

din bară la distanța x de capătul fix și reacțiunea R a lagărului. Cunoscînd secțiunea A a barei și modulul de elasticitate E, să se afle alungirea barei.

R. $F(x) = \frac{m}{2l}\omega^2(l^2 - x^2)$, $\quad R = -\frac{1}{2}m\omega^2 l$. $\quad \Delta l = \frac{m\omega^2 l^2}{2AE}$.

12.2. O bară subțire omogenă și uniformă de masă m și lungime l oscilează liber cu amplitudinea unghiulară α în planul vertical în jurul capătului superior fixat într-o articulație (fig. 12.16). Să se afle în funcție de unghiul de deviație θ: **a)** viteza și accelerația unghiulară a barei; **b)** forța de presiune exercitată de bară asupra articulației; **c)** momentul încovoietor la distanța x de articulație. Care este secțiunea periculoasă?

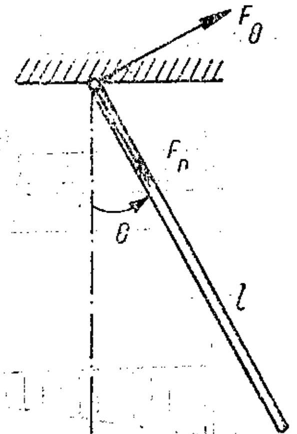


Fig. 12.16

R. a) $\omega^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$, $\varepsilon = -\frac{3g}{2l}\sin\theta$;

b) $F_r = \frac{1}{2}mg(5\cos\theta - 3\cos\alpha)$.

$F_\theta = -\frac{1}{4}mg\sin\theta$;

c) $M = \frac{mg}{4l^2}(l - x)^2 x\sin\theta$; $\quad M_{max} = \frac{1}{9}mgl\sin\theta$ pentru $x = l/3$.

12.3. O bară de lungime l, secțiune A și masă m este suspendată la capătul superior. Să se afle alungirea barei datorită propriei sale greutăți.

R. $\Delta l = \frac{mgl}{2EA}$.

12.4. O bară uniformă de lungime l și moment geometric J se sprijină liber la capete pe două reazeme, fiind încărcată cu o forță uniform distribuită q ca în figura 12.17. Să se afle forța tăietoare maximă, momentul încovoietor maxim și săgeata.

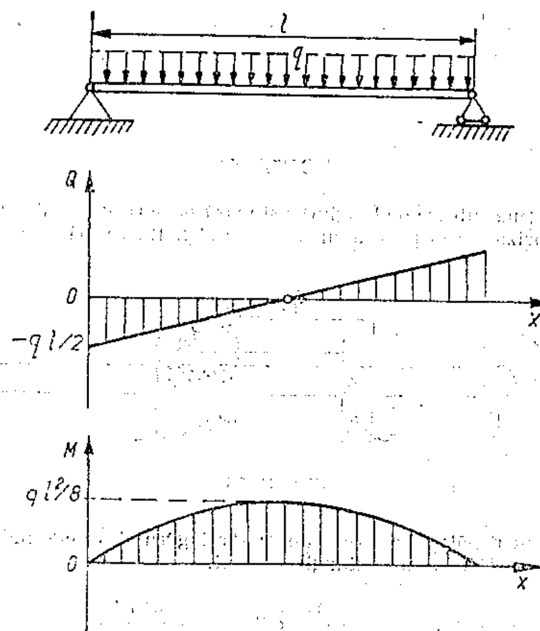
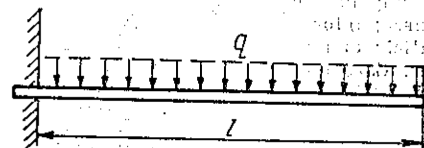


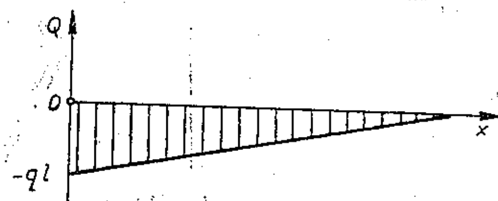
Fig. 12.17

R. $Q_m = \frac{1}{2}ql$, $M_m = \frac{1}{8}ql^2$, $f = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}$.



12.5. O bară uniformă de lungime l și moment geometric J este încastrată la un capăt și încărcată cu o forță uniform distribuită q, ca în figura 12.18. Să se afle forța tăietoare maximă, momentul încovoietor maxim și săgeata.

R. $Q_m = -ql$, $M_m = -\frac{1}{2}ql^2$, $f = -\frac{ql^4}{8EJ}$.



12.6. Ce presiune interioară poate suporta un tub cilindric, respectiv un balon sferic, dacă raza este R, grosimea pereților d $(\ll R)$ și tensiunea elastică de rupere σ_r?

R. $p \cong \sigma_r d/R$, $p \cong 2\sigma_r d/R$.

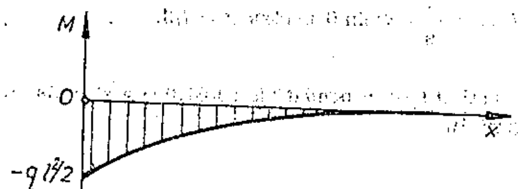


Fig. 12.18

12.7. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a curba într-un cerc o bandă de oțel de lungime l, lățime b și grosime h, cunoscînd modulul E? Se consideră deformațiile elastice.

R. $W = \frac{\pi^2}{6l}Ebh^3$.

CAPITOLUL 13

MECANICA FLUIDELOR

Problema fundamentală a mecanicii fluidelor este determinarea distribuției presiunilor și vitezelor într-un fluid.

13.1. STATICA FLUIDELOR

Într-un fluid în **repaus** *presiunea este* **izotropă.** Pe fiecare element de suprafață $d\vec{S}$ în interiorul fluidului se exercită o forță perpendicular pe suprafață și independent de orientarea elementului de suprafață: $d\vec{F} = p\,d\vec{S}$.

13.1.1. PRESIUNEA HIDROSTATICĂ

Datorită greutății lor, păturile de fluid exercită presiuni unele asupra altora. Variația de presiune dp între două suprafețe de nivel z, $z + dz$ este dată de greutatea păturii de fluid de grosime dz, exercitată pe unitatea de suprafață (fig. 13.1):

$$dp = -\rho g\, dz;\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0\right). \qquad (13.1)$$

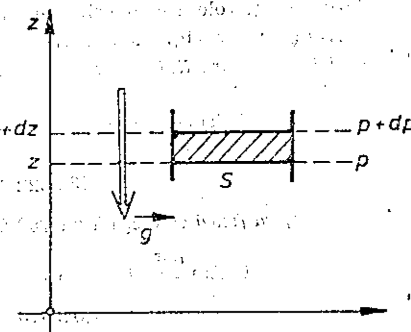


Fig. 13.1

Mai general, presiunea p într-un fluid este o funcție de punct, $p = p(x, y, z)$. Variația ei se datorește greutății păturilor de fluid, adică prezenței cîmpului gravitațional $\vec{\Gamma} = \vec{g}$ (a forțelor masice). Gradientul presiunii, care caracterizează variația presiunii în spațiu și este dat de derivatele parțiale ale acesteia, este un vector perpendicular pe suprafețele de presiune

constantă (în sensul creşterii presiunii), deci este perpendicular pe suprafeţele de cîmp gravitaţional constant în sensul acestui cîmp. În cazul particular de mai sus aceste suprafeţe sînt orizontale şi cîmpul este vertical în jos, de aceea gradientul presiunii s-a redus numai la componenta verticală (13.1) (în SC ales). În general avem

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} = \rho \vec{g} = \rho \vec{\Gamma} = \frac{dm}{dV} \vec{\Gamma} = \frac{d\vec{F}}{dV}, \tag{13.2}$$

gradientul presiunii este egal cu forţa pe unitatea de volum (densitatea volumică de forţă).

La lichide densitatea ρ este practic constantă, astfel încît (13.1) dă prin integrare:

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \quad \text{sau} \quad |\Delta p| = \rho g h, \tag{13.3}$$

unde h este grosimea stratului de fluid.

Observaţie. Presiunea (13.1–3) este numită *hidrostatică* sau *aerostatică* spre a o deosebi de presiunea *cinetică* de la gaze, care se datorește bombardamentului molecular asupra pereţilor vasului.

13.1.2. UNITĂŢI DE PRESIUNE

Reamintim unităţile de presiune:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = L^{-1}MT^{-2} = 1\ \text{N/m}^2 \equiv 1\ \text{Pa în SI},$$

$$[p] = 1\ \text{dyn/cm}^2 = 1\ \text{barye} = 0{,}1\ \text{N/m}^2\ \text{in CGS}. \tag{13.4}$$

$$1\ \text{bar} = 10^6\ \text{barye} = 1\ \text{Mbarye} = 10^5\ \text{N/m}^2.$$

Alte unităţi tolerate, folosite curent sînt următoarele:

Torrul (sau mm Hg) este egal cu presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm la 0°C şi în cîmp gravitaţional normal (standard). Folosind (13.3) rezultă:

$$1\ \text{Torr} = [\rho g h] = 13{,}5951 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\ \text{m} =$$

$$= 133{,}322\ \text{N/m}^2 \approx 133{,}3\ \text{N/m}^2. \tag{13.5}$$

O *atmosferă fizică* este egală cu 760 Torr:

$$1\ \text{atm} \stackrel{\text{def}}{=} 760\ \text{Torr} = 760 \cdot 133{,}322\ \text{N/m}^2 = 101\,325\ \text{N/m}^2 \approx$$

$$\approx 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2 = 1{,}013\ \text{bar}. \tag{13.6}$$

O *atmosferă tehnică* este:

$$1\ \text{at} \stackrel{\text{def}}{=} 1\ \text{kgf/cm}^2 = 98066{,}5\ \text{N/m}^2 \approx 9{,}8 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2,$$

$$1\ \text{at} = 735{,}392\ \text{Torr} \approx 735\ \text{Torr}, \tag{13.7}$$

$$1\ \text{atm} = 1{,}03323\ \text{at} \approx 1{,}033\ \text{at}.$$

Milimetrul coloană de apă (mm H_2O):

$$1\ \text{mm}\ H_2O \approx 9{,}8\ \text{N/m}^2; \quad 1\ \text{Torr} \approx 13{,}6\ \text{mm}\ H_2O, \tag{13.8}$$

$$1\ \text{atm} \approx 10{,}33\ \text{m}\ H_2O, \quad 1\ \text{at} \cong 10\ \text{m}\ H_2O. \tag{13.9}$$

13.1.3. LEGEA LUI PASCAL

Presiunea exercitată din exterior la suprafaţa unui lichid incompresibil se transmite cu aceeaşi intensitate în toate direcţiile în lichid.

Legea poate fi dedusă şi teoretic din consideraţiile de conservare a energiei: lucrul mecanic efectuat de forţa dF_1 pe distanţa dx_1 trebuie să fie egal cu lucrul mecanic al forţei dF_2 pe distanţa dx_2 (fig. 13.2): $dF_1 dx_1 = dF_2 dx_2$, dar din condiţia de incompresibilitate: $dS_1 dx_1 = dS_2 dx_2$, de unde împărţind membru la membru, rezultă:

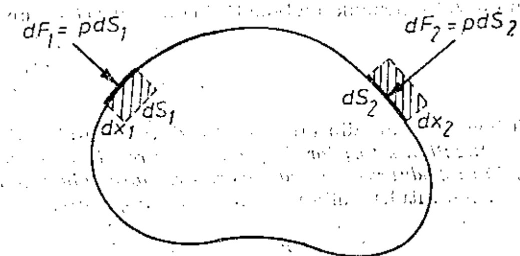


Fig. 13.2

$$dF_1/dS_1 = dF_2/dS_2 = p. \tag{13.10}$$

Cu ajutorul legii lui Pascal se explică funcţionarea preselor hidraulice.

13.1.4. LEGEA LUI ARHIMEDE

Un corp cufundat într-un fluid este împins de jos în sus cu o forţă egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp.

Pentru demonstraţie putem folosi următorul raţionament simplu, ingenios şi elegant. Să delimităm în interiorul fluidului un volum oarecare V de fluid. Putem presupune de exemplu, că l-am delimitat printr-o peliculă infinit de subţire, imponderabilă, perfect flexibilă şi inextensibilă, ceea ce nu modifică cu nimic echilibrul volumului de fluid astfel delimitat, sau putem presupune că acest volum de fluid s-a „solidificat" (fig. 13.3). Asupra acestui volum acţionează forţa de greutate $\vec{G}_f = m\vec{g}$, precum şi forţele de presiune exercitate de restul fluidului, perpendicular pe suprafaţa ce delimitează volumul V. Deoarece acest volum de fluid este în echilibru, rezultanta tuturor forţelor de presiune exercitate normal pe suprafaţa sa de restul fluidului trebuie să fie egală în modul şi de sens opus cu greutatea $\vec{G}_f$ a fluidului delimitat, cu punctul de aplicaţie în centrul de greutate al volumului de fluid considerat. Înlocuind acum acest volum

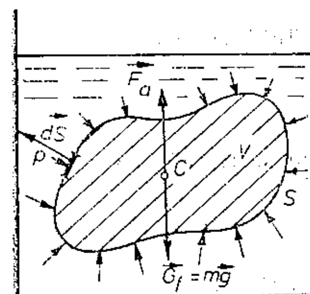


Fig. 13.3

de fluid cu volumul *identic* al unui corp oarecare, rezultanta forțelor de presiune exercitate de fluid pe suprafața corpului nu se schimbă cu nimic, adică rămîne ca înainte, egală în modul și de sens opus cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp, avînd punctul de aplicație în centrul de greutate al volumului de fluid dezlocuit (centrul de presiune).

Observație. Legea lui Arhimede poate fi demonstrată matematic pe baza formulei hidrostatice (13.2).

Rezultanta forțelor de presiune:

$$\oint_S (-p)\mathrm{d}\vec{S} = \int_V (-\mathrm{grad}\, p)\mathrm{d}V = -\int_V \rho\vec{g}\,\mathrm{d}V = -\int \vec{g}\,\mathrm{d}m = -\vec{G}_f, \tag{13.11}$$

unde prima integrală reprezintă suma (rezultanta) tuturor forțelor de presiune exercitate pe suprafața închisă oarecare S în interiorul fluidului și care delimitează volumul V. Mai departe am folosit o formulă matematică cunoscută (f — funcție scalară cu derivate continue):

$$\oint_S f\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{grad}\, f\,\mathrm{d}V. \tag{13.12}$$

Ultima integrală din (13.11) reprezintă greutatea fluidului din interiorul suprafeței închise S.

Rezultanta forțelor de presiune exercitate pe o suprafață închisă în interiorul unui fluid este egală în modul și opusă ca sens cu greutatea volumului de fluid cuprins de acea suprafață.

Momentul rezultant al forțelor de presiune:

$$\oint_S \vec{r}\times\mathrm{d}\vec{F} = \oint_S \vec{r}\times(-p)\mathrm{d}\vec{S} = -\oint_S p\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{rot}\,(p\vec{r})\mathrm{d}V =$$

$$= \int_V \mathrm{grad}\, p\times\vec{r}\mathrm{d}V = -\int_V \vec{r}\times\rho\vec{g}\,\mathrm{d}V = -\int_V \vec{r}\times\vec{g}\,\mathrm{d}m = -\int \vec{r}\times\mathrm{d}\vec{G}, \tag{13.13}$$

unde $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ înseamnă rotorul vectorului $\vec{a}$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{i}(\partial_y a_z - \partial_z a_y) + \vec{j}(\partial_z a_x - \partial_x a_z) + \vec{k}(\partial_x a_y - \partial_y a_x) \tag{13.14}$$

și am folosit următoarele teoreme matematice ($\vec{a}$ vector cu derivate continue):

$$\oint_S \vec{a}\times\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \mathrm{rot}\,\vec{a}\,\mathrm{d}V,\ \mathrm{rot}(f\vec{a}) = \mathrm{grad}\, f\times\vec{a} + f\,\mathrm{rot}\,\vec{a},\ (\mathrm{rot}\,\vec{r}\equiv 0). \tag{13.15}$$

Momentul rezultant al forțelor de presiune exercitate pe o suprafață închisă dintr-un fluid este egal în modul și de sens opus cu momentul rezultant al forțelor de greutate ale volumului de fluid cuprins de acea suprafață.

Greutatea aparentă a unui corp cufundat într-un fluid va fi (ρ_f — densitatea fluidului, ρ_s — densitatea solidului):

$$G_a = mg - \rho_f V g = mg(1 - \rho_f/\rho_s). \tag{13.16}$$

Dacă $\rho_f < \rho_s$ corpul se scufundă, dacă $\rho_f > \rho_s$ corpul se ridică la suprafață (plutește).

13.1.5. FLUIDELE ÎN SR ACCELERATE

Dacă fluidul se află în repaus relativ într-un SR accelerat, atunci este comod să-l studiem în SR *propriu*: considerațiile de hidrostatică se aplică întocmai, introducînd bineînțeles *forțele de transport* (forțele Coriolis sînt nule, dacă fluidul este în repaus în acel sistem).

De exemplu, suprafața liberă a fluidului va fi perpendiculară pe rezultanta forțelor masice: gravitaționale și de transport; la fel distribuția straturilor de fluid de densități diferite (separatorul centrifugal); forța arhimedică se schimbă corespunzător etc. Totul se petrece ca și cum s-ar adăuga un cîmp suplimentar de forțe gravitaționale egale cu forțele de transport.

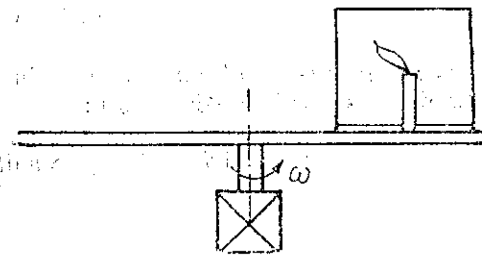


Fig. 13.4

Mai general, dacă fluidul curge în SR neinerțial considerat, atunci mai trebuie adăugate și forțele Coriolis.

De exemplu, dacă într-un vas închis arde o lumînare (ferită de curenți de aer) și punem vasul la marginea unui disc orizontal în rotație (la mașina centrifugă), atunci flacăra se înclină spre *centrul* discului (spre axa de rotație) și se încovoaie spre dreapta (dacă privim de sus și rotația se face în sens trigonometric) (fig. 13.4).

În adevăr, flacăra este formată dintr-un *curent de gaze fierbinți* de densitate mai mică decît aerul, de aceea în cîmpul forțelor de transport centrifuge flacăra se înclină radial către centru, iar forțele Coriolis (care acționează numai asupra gazelor fierbinți care se mișcă) o încovoaie spre dreapta.

Analog, dacă lăsăm să cadă *liber* un felinar (ferit de curenții de aer), atunci în timpul căderii flacăra se stinge, fiindcă lipsește forța ascensională statică, care să îndepărteze gazele arse ale flăcării (deci va fi împiedicat accesul oxigenului).

13.2. ECUAȚIA DE CONTINUITATE

Fluidul este caracterizat prin distribuția vitezelor (cîmp vectorial) și a presiunilor (cîmp scalar):

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t),\ p = p(\vec{r}, t). \tag{13.17}$$

Dacă viteza și presiunea *nu depind de timp*, curgerea este *staționară sau în regim permanent.*

13.2.1. LINIILE DE CURENT

Liniile de curent sînt traiectoriile particulelor de fluid în regim staționar sau în general sînt acele linii de-a lungul cărora *vectorul viteză este* **tangent** *la linie.*

Dacă prin toate punctele unui contur închis ducem liniile de curent, obținem un tub de curent, a cărui suprafață laterală este formată deci din linii de curent. Particulele de fluid aflate într-un tub de curent nu pot ieși din el în regimul de curgere staționar.

13.2.2. FLUXUL DE FLUID

Cantitatea de fluid dm care trece în timpul dt printr-un element de suprafață dS este evident (fig. 13.5):

$$dm = \rho\, dS_{\perp} v\, dt = \rho d\vec{S}\vec{v}\, dt = \vec{\mu}\, d\vec{S}\, dt,\quad \vec{\mu} = \rho\vec{v}, \tag{13.18}$$

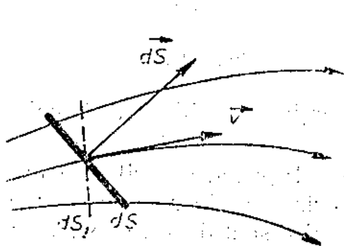


Fig. 13.5

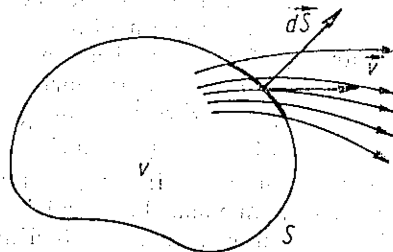


Fig. 13.6

unde $\vec{\mu}$ este *densitatea curentului* (fluxului) de fluid, egală numeric cu masa de fluid care trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață așezată perpendicular pe direcția curentului:

$$\mu = \frac{dm}{dS_{\perp} dt} = \rho v,\ \vec{\mu} = \rho\vec{v}. \tag{13.18'}$$

13.2.3. ECUAȚIA DE CONTINUITATE

Să delimităm în interiorul fluidului un volum arbitrar V de fluid, mărginit de suprafața închisă S (fig. 13.6). Masa de fluid conținută în volumul V este

$$\int dm = \int_V \rho(\vec{r}, t)\, dV. \tag{13.19}$$

Printr-un element de suprafață dS iese cantitatea de fluid (13.18), de unde prin toată suprafața iese cantitatea de fluid:

$$dt \oint_S \vec{\mu} d\vec{S} = dt \oint_S \rho\vec{v}\, d\vec{S}, \tag{13.20}$$

ceea ce duce la *scăderea* corespunzătoare a masei (13.19) conținute în volumul V (integrala 13.19 depinde de timpul t ca de un parametru):

$$-d\int \rho(\vec{r}, t) dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, dV = \oint \rho\vec{v}\, d\vec{S}\, dt,$$

de unde

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \oint_S \rho\vec{v}\, d\vec{S}; \tag{13.21}$$

scăderea masei de fluid conținute în interiorul unei suprafețe închise S, în unitatea de timp, este egală cu fluxul de masă care *iese* prin suprafața S (expresia legii de conservare a masei).

Aplicînd teorema lui Gauss ($\vec{a}$ — vector arbitrar cu derivate continue):

$$\oint_S \vec{a}\, d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{a}\, dV,\ \mathrm{div}\, \vec{a} \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z, \tag{13.22}$$

membrului drept din (13.21), obținem

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho\vec{v}\right) dV = 0. \tag{13.23}$$

Cum volumul V este arbitrar, integrandul trebuie să fie nul:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho\vec{v} = 0. \tag{13.24}$$

Aceasta este *ecuația de continuitate* (sau ecuația continuității) — expresie a legii de conservare a masei fluidului.

O ecuație absolut identică este valabilă pentru densitatea de sarcină electrică ρ (expresie a legii de conservare a sarcinii electrice).

13.2.4. REGIM STAȚIONAR

În cazul regimului *staționar* (permanent), densitatea fluidului nu depinde de timp, $\partial\rho/\partial t = 0$, și (13.24) devine:

$$\mathrm{div}\, \rho\vec{v} = 0 \quad \text{sau} \int_V \mathrm{div}\, \rho\vec{v}\, dV = \oint_S \rho\vec{v}\, d\vec{S} = 0. \tag{13.25}$$

Să aplicăm ultima ecuație unui tub de curent între două secțiuni $S_{1,2}$ (fig. 13.7). Pe suprafața laterală: $\vec{v}\, d\vec{S} = 0$, de aceea:

$$\oint \rho\vec{v}\, d\vec{S} = \int_{S_2} \rho\vec{v}\, d\vec{S} - \int_{S_1} \rho\vec{v}\, d\vec{S} = 0,$$

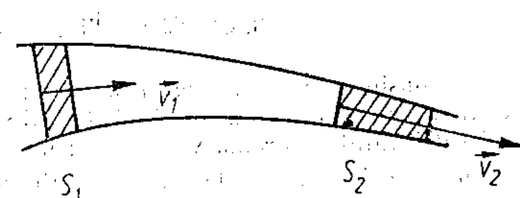


Fig. 13.7

unde în ambele integrale din membrul drept, $d\vec{S}$ se ia în sensul curgerii. Prin urmare,

$$Q_m = \int_{S_1} \rho\vec{v}\, d\vec{S} = \int_{S_2} \rho\vec{v}\, d\vec{S} = \mathrm{const}, \tag{13.26}$$

adică, *în regim staționar debitul de masă Q_m este același prin fiecare secțiune a unui tub de curent.*

Pentru un tub subțire, astfel încît densitatea și viteza fluidului să fie practic constante pe secțiunea tubului, obținem:

$$Q_m = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho v S = \mathrm{const}. \tag{13.27}$$

13.2.5. FLUID INCOMPRESIBIL

În cazul curgerii unui *fluid incompresibil*, $\rho = \mathrm{const}$, deci $\partial\rho/\partial t = 0$ și $\partial\rho/\partial x = 0$ etc., și (13.24) devine:

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \quad \text{sau} \int_V \mathrm{div}\, \vec{v}\, dV = \oint_S \vec{v}\, d\vec{S} = 0. \tag{13.28}$$

Aplicînd unui tub de curent, ca mai sus, obţinem :

$$Q_v = \int_{S_1} \vec{v}\, d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{v}\, d\vec{S} = \text{const}, \qquad (13.29)$$

unde în ambele integrale $d\vec{S}$ se ia în sensul curgerii, deci
în cazul curgerii fluidului incompresibil, atît debitul de volum cît şi debitul de masă sînt constante de-a lungul unui tub de curent.

Luînd vitezele mediate pe secţiunea tubului, ecuaţia (13.29) devine :

$$Q_v = \langle v \rangle S = \text{const şi } Q_m = \rho\langle v \rangle S = \text{const}. \qquad (13.30)$$

Acolo unde tubul se îngustează, viteza fluidului creşte. Rezultă atunci că *acolo unde liniile de curent se îndesesc, viteza fluidului creşte.*

13.3. ECUAŢIA LUI BERNOULLI

Se numeşte **fluid ideal** *un fluid incompresibil şi lipsit de viscozitate.*

Cu o precizie destul de bună, lichidele reale pot fi considerate incompresibile. Deşi gazele sînt uşor compresibile, totuşi compresibilitatea lor se manifestă abia la curgeri cu viteze apropiate de viteza sunetului. Experienţa arată că un mare număr de lichide şi chiar gaze, dacă vitezele acestora sînt mult mai mici decît viteza sunetului şi gradienţii vitezelor sînt mici, corespund satisfăcător fluidului ideal. Vom studia în acest paragraf curgerea unui fluid *ideal.*

13.3.1. ECUAŢIA LUI BERNOULLI

Să considerăm fluidul *ideal* şi un tub de curent infinit de subţire, delimitat la capete de două secţiuni dS_1, dS_2 şi să aplicăm cantităţii de fluid astfel delimitate teorema variaţiei energiei mecanice (fig. 13.8). În timpul dt sistemul se deplasează de-a lungul tubului din poziţia AB în poziţia $A'B'$. Totul se petrece ca şi cum din porţiunea AA' ar dispărea masa $dm = \rho dS_1 v_1 dt = \rho\, dV$ cu energia cinetică $dm \cdot v_1^2/2$ şi cu energia potenţială $dm \cdot gh_1$, iar în

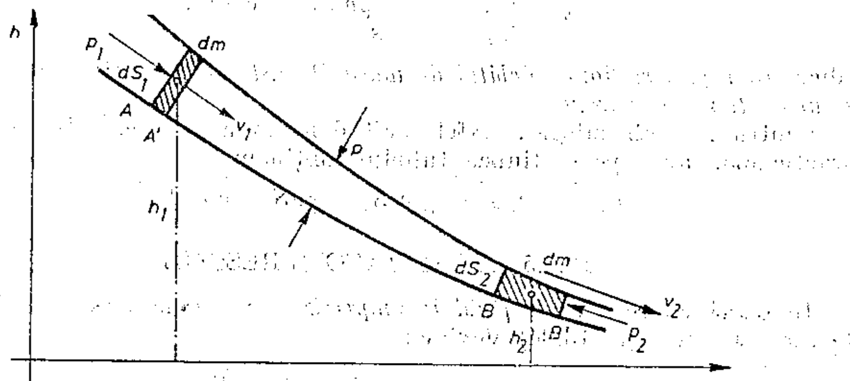


Fig. 13.8

porţiunea BB' ar apărea o masă egală (datorită incompresibilităţii fluidului ideal) $dm = \rho\, dS_2 v_2\, dt = \rho\, dV$ cu energia cinetică $dm \cdot v_2^2/2$ şi cu energia potenţială $dm \cdot gh_2$.

Variaţia energiei mecanice (cinetice şi potenţiale) a sistemului este deci

$$dE = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2) + dm\, g(h_2 - h_1) \qquad (13.31)$$

şi trebuie să fie egală cu lucrul mecanic al forţelor de presiune exercitate asupra sistemului considerat :

$$dW = F_1\, ds_1 - F_2\, ds_2 = p_1\, dS_1 v_1\, dt - p_2\, dS_2\, v_2\, dt = $$
$$= p_1\, dV - p_2\, dV, \quad dV = dm/\rho\,; \qquad (13.32)$$

forţele de presiune laterale nu efectuează lucru mecanic şi nu avem forţe tangenţiale de frecare, fluidul fiind presupus ideal (fără viscozitate) :

$$dE = dW \to p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

sau

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}. \qquad (13.33)$$

Aceasta este *ecuaţia lui Daniel Bernoulli* (1700—1782). Constanta diferă în general de la o linie de curent la alta (este aceeaşi la curgerea fără vîrtejuri).

Presiunea p este presiunea *statică*; $p_d \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\rho v^2$ se numeşte presiune *dinamică*, ca se datoreşte energiei cinetice a fluidului, fiind egală cu energia cinetică a unităţii de volum, iar $\rho\, gh$ este presiunea de „poziţie" (sau „potenţială"), datorită energiei potenţiale, fiind egală cu energia potenţială a unităţii de volum.

13.3.2. LEGEA LUI BERNOULLI

Presiunea totală într-un fluid perfect este constantă de-a lungul unei linii de curent.

Presiunea statică se exercită asupra unui element de suprafaţă aşezat *paralel* cu linii de curent, de exemplu *pe pereţii tubului* (de aceea este uneori numită presiunea pe pereţi), sau exercitată asupra unui element de suprafaţă orientat arbitrar dar mişcat *solidar* cu fluidul. Presiunea statică se măsoară cu sondele de presiune.

Presiunea totală se exercită asupra unui element de suprafaţă aşezat perpendicular pe liniile de curent şi se măsoară cu tubul Pitot avînd deschiderea aşezată perpendicular pe liniile de curent. Presiunea dinamică se măsoară cu tubul Prandtl (fig. 13.9).

Pentru conducte *orizontale* ecuaţia lui Bernoulli devine

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}. \qquad (13.34)$$

Pentru linia de curent care intră în tubul Pitot $v_2 = 0$ şi deci presiunea indicată de el $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 =$ presiunea totală.

13.3.3. PARADOXUL HIDRODINAMIC

Intrînd într-o porțiune îngustă a unui tub de curent viteza particulelor crește (debitul fiind constant), adică ele se mișcă accelerat, de unde rezultă că presiunea în fluid în porțiunea largă a tubului trebuie să fie mai mare decît în porțiunea îngustă.

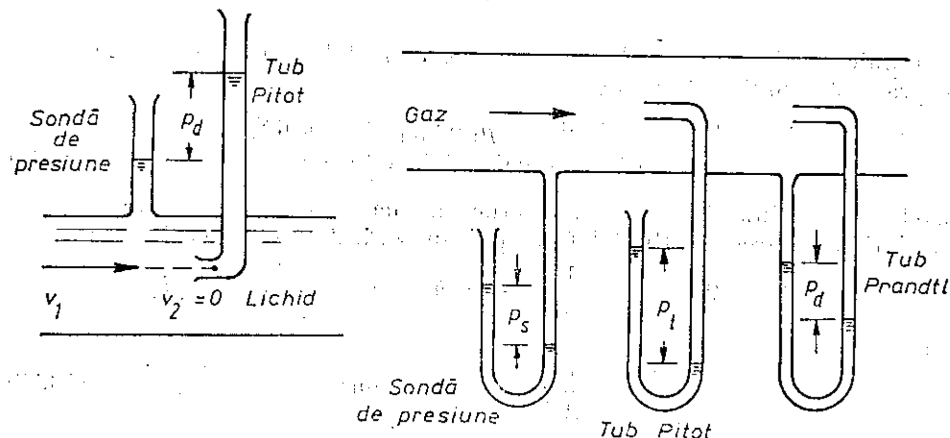


Fig. 13.9

În adevăr, deoarece în porțiunile înguste ale tubului viteza fluidului crește (conform ecuației de continuitate), crește și presiunea dinamică, de aceea trebuie să *scadă* presiunea statică, adică presiunea pe pereți, pentru ca suma lor să rămînă constantă, conform ecuației lui Bernoulli (*paradoxul hidrodinamic*).

Presiunea la gîtuitură poate scădea chiar sub presiunea atmosferică, astfel încît apare *fenomenul de aspirație* pe care se bazează unele aplicații practice, precum pulverizatorul, trompa de apă, lampa Bunsen etc. (fig. 13.10).

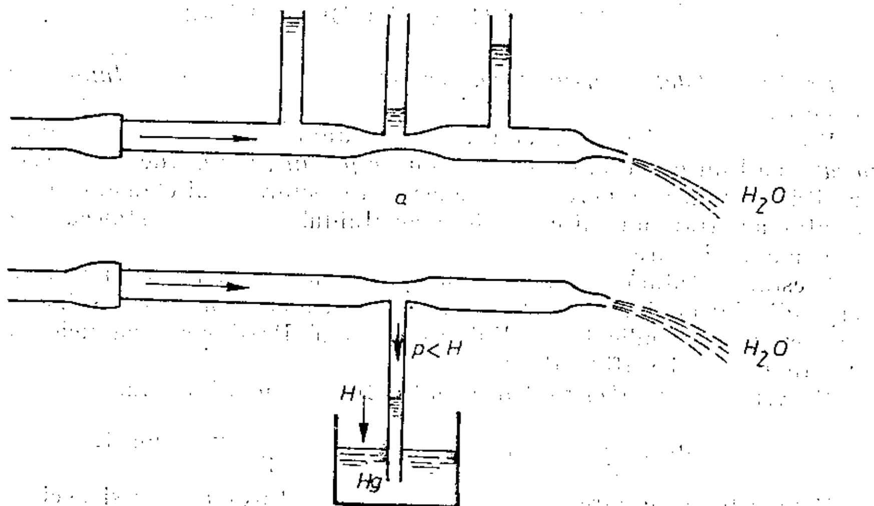


Fig. 13.10

Aplicații. a) *Formula lui Torricelli*. În cazul scurgerii unui lichid printr-un orificiu S într-un vas, sub acțiunea greutății, legea lui Bernoulli dă pentru tubul de curent delimitat de secțiunile S' și S (fig. 13.11):

$$H + \frac{1}{2}\rho v'^2 + \rho gh = H + \frac{1}{2}\rho v^2;\ S'v' = Sv,$$

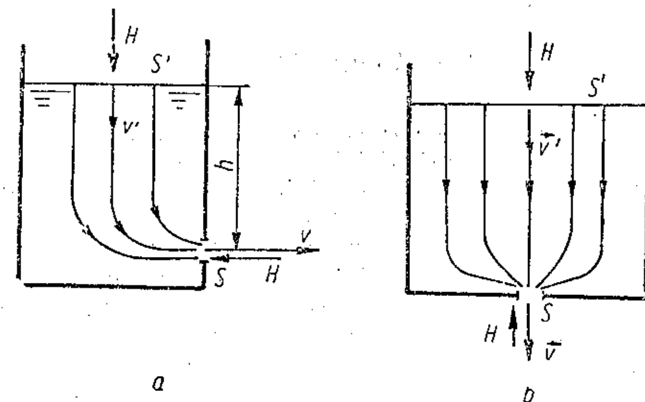


Fig. 13.11

de unde

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - S^2/S'^2}}. \tag{13.35}$$

Dacă $S' \gg S$, obținem *formula lui Torricelli* (seamănă cu formula lui Galilei de la căderea liberă):

$$v = \sqrt{2gh}; \tag{13.35'}$$

viteza de scurgere coincide cu viteza particulelor în căderea liberă.

Se vede și din figura 13.11 că acolo unde liniile de curent se îndesesc, viteza fluidului crește.

b) *Reacțiunea fluidului asupra conductei curbate*. Un fluid care curge printr-o conductă curbată exercită asupra acesteia o forță de reacțiune F' care poate fi calculată din variația impulsului, raportată la unitatea de timp. În unitatea de timp trece printr-o secțiune a conductei masa de fluid $Q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$ (debitul masic), a cărei variație de impuls este egală cu forța exercitată de conductă asupra fluidului (fig. 13.12):

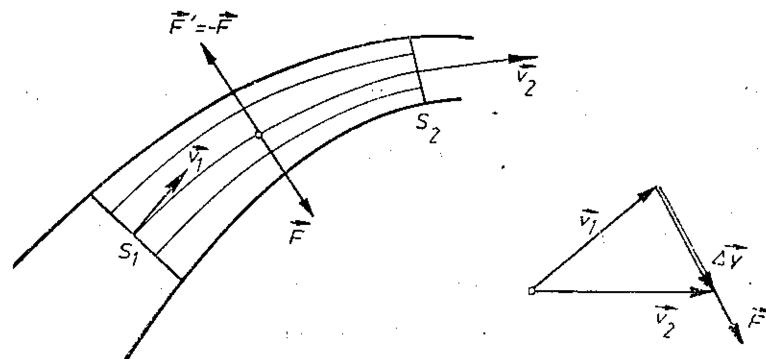


Fig. 13.12

$$\vec{F} = Q_m \Delta\vec{v} = Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \tag{13.36}$$

de unde forța de reacțiune $\vec{F'}$ exercitată de fluid asupra conductei:

$$\vec{F'} = -\vec{F} = Q_m(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = \rho S v(\vec{v_1} - \vec{v_2}). \quad (13.37)$$

Exemplu: Un tub de cauciuc, legat cu un capăt la robinetul de apă și cu celălalt capăt încolăcit pe masă, se va îndrepta prin curgerea apei.

13.4. VISCOZITATEA

La viteze nu prea mari curgerea fluidelor este *laminară* (în straturi paralele), adică liniile de curent sînt bine determinate și nu se intersectează nicăieri între ele, fiecare particulă de fluid rămîne mereu în interiorul unui același tub de curent. La viteze mari mișcarea devine *turbulentă*, neregulată, porțiunile de fluid se amestecă și se formează *vîrtejuri* (există și curgerea fluidului ideal cu vîrtejuri).

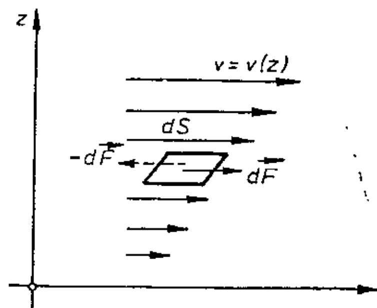


Fig. 13.13

a) Dacă straturile de fluid alunecă unele față de altele, între ele apar *forțe de frecare internă sau de viscozitate.* Stratul cu viteză mai mică va frîna stratul cu viteză mai mare cu care este în contact, și invers, stratul cu viteză mai mare va accelera stratul cu viteză mai mică peste care el lunecă.

Apariția acestor forțe, situate în planele de lunecare, se explică prin variația de impuls a straturilor datorită trecerii moleculelor dintr-un strat în altul. Vom presupune că direcția de curgere a fluidului este aceeași peste tot și că viteza de curgere variază ca modul numai în direcție perpendiculară (transversală) pe direcția de curgere (fig. 13.13).

Experiența arată că *forța de frecare internă* care apare în planul de lunecare pe unitatea de suprafață este proporțională cu gradientul vitezei (legea lui Newton):

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dz}, \quad dF = \eta \frac{dv}{dz} dS, \quad (13.38)$$

unde η este *coeficientul de viscozitate* (dinamică), dependent de natura fluidului (și de temperatură).

b) Dimensiunea coeficientului de viscozitate este

$$[\eta] = \frac{L^{-1}MT^{-2}}{LT^{-1}L^{-1}} = L^{-1}MT^{-1} = \text{kg/m·s} = \text{N·s/m}^2 \text{ în SI.} \quad (13.39)$$

Unitatea CGS este *poise* P (după numele lui Poiseuille):

$$1 \text{ P} = 1 \text{ g/cm·s} = 0{,}1 \text{ kg/m·s}, \quad (13.40)$$

deci *unitatea SI este egală cu decapoise* (daP).

La lichide η este de ordinul a 10^{-3} daP, iar la gaze η este cu două ordine mai mic: $\eta \sim 10^{-5}$ daP.

Viscozități în 10^{-3} daP

	0°C	20°C	100°C
apă	1,786	1,002	0,283
mercur	1,68	1,55	1,23
aer	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	$2{,}2 \cdot 10^{-2}$

Viscozitatea η împărțită prin densitatea ρ a fluidului se numește *viscozitatea cinematică*:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\nu] = \frac{L^{-1}MT^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1} = \text{m}^2/\text{s în SI.} \quad (13.41)$$

Unitatea CGS este *stokes* (St):

$$1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}. \quad (13.42)$$

La lichide $\nu \sim 10^{-6}$ m²/s, la gaze $\nu \sim 10^{-5}$ m²/s (mai mare decît la lichide).

Viscozitatea η la lichide scade sensibil cu creșterea temperaturii, în timp ce la gaze crește ca $\sqrt{T}$.

c) Existența frecării interne (a viscozității) se arată experimental ușor suspendînd printr-un fir un disc sau un cilindru sub care se rotește un alt disc sau cilindru (fig. 13.14).

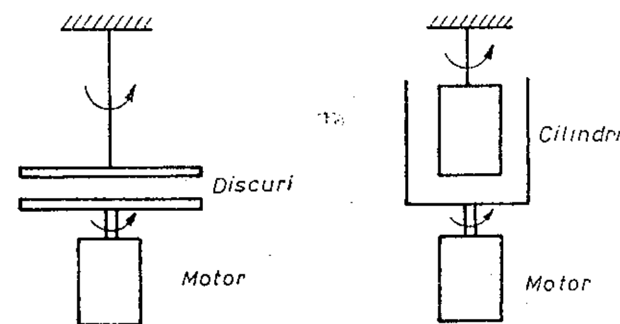


Fig. 13.14

Stratul de fluid imediat adiacent corpului rotit aderă de acesta și este antrenat de el. Celelalte straturi sînt antrenate cu viteze din ce în ce mai mici pînă la ultimul strat alipit celuilalt disc sau cilindru asupra căruia se va exercita astfel o forță de frecare care îl va roti.

13.5. FORMULA LUI POISEUILLE

Să studiem curgerea *laminară staționară* a unui fluid *viscos* printr-un tub. Curgerea laminară are loc la viteze nu prea mari sau la diametre nu prea mari.

Să delimităm un tub de curent de rază r (fig. 13.15).

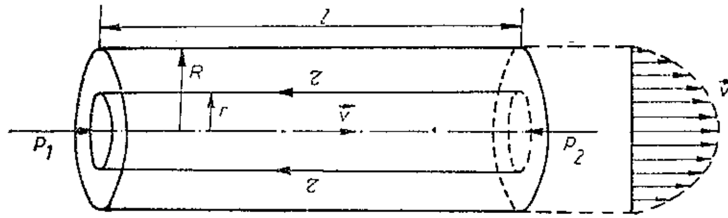


Fig. 13.15

Asupra fluidului din acest tub acționează forțele de presiune de la extremități cu rezultanta : $p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2$ și forța de frecare internă pe suprafața laterală, exercitată de restul fluidului, datorită viscozității : $\tau 2\pi r l$. Curgerea fiind *staționară* (cu viteză constantă), forțele își fac echilibru :

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = 2\pi r l \tau$$

sau ținînd seama de (13.38) :

$$(p_1 - p_2)r = -2l\eta \frac{dv}{dr}, \tag{13.43}$$

unde semnul minus se datorește semnului negativ al gradientului vitezei : $dv/dr < 0$; viteza pe axa tubului este maximă și *scade* spre pereții tubului, fiind nulă la perete, în stratul adiacent.

Prin integrare obținem :

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r\, dr, \qquad v = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta} r^2 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția că la perete, pentru $r = R$, viteza este nulă :

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2) = v_m(1 - r^2/R^2),$$

$$v_m = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2, \quad v/v_m = 1 - (r/R)^2. \tag{13.44}$$

Distribuția vitezelor este deci *parabolică* (fig. 13.15).

Să calculăm *debitul volumic* :

$$Q_v = \int v\, dS = \int_0^R v\, 2\pi r\, dr = \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{4l\eta}\int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr,$$

$$Q_v = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8l\eta} R^4 = S\langle v\rangle, \text{ unde } \langle v\rangle = \frac{p_1 - p_2}{8l\eta} R^2. \tag{13.45}$$

Aceasta este *formula lui Poiseuille* (1841).

Debitul este proporțional cu căderea de presiune pe unitatea de lungime a tubului și cu puterea a 4-a a razei tubului.

Această formulă poate fi folosită pentru determinarea viscozității fluidelor (de exemplu, în viscozimetrul lui Ostwald).

Legea lui Poiseuille explică unele aspecte ale fiziologiei circulației sanguine. În adevăr, rețeaua capilară a omului însumează 10^5 km ! După nevoile organismului debitul sîngelui este reglat ușor prin contracția sau dilatarea vaselor sanguine ($\sim R^4$!) (sîngele necesar este luat din „depoul de sînge", în primul rînd din splină și ficat).

13.6. LEGEA LUI STOKES

13.6.1. STRATUL LIMITĂ. LEGEA STOKES

Atunci cînd un corp se mișcă într-un fluid, la suprafața sa aderă un strat foarte subțire de fluid, antrenat de corp. În regim laminar, deci la viteze nu prea mari, în vecinătatea corpului există un strat relativ subțire, numit *strat limită*, în care viteza scade pînă la zero și în care se manifestă forțele de frecare datorite viscozității.

Putem evalua grosimea d a stratului limită astfel. Notăm lungimea și lățimea stratului limită cu h și b. Atunci forța de frecare internă după legea lui Newton este

$$F \sim \eta \frac{v}{d} hb. \tag{13.46}$$

Pe de altă parte, forța de frecare internă poate fi găsită din variația de impuls a fluidului (de la stratul cu viteză zero pînă la cel cu viteza v) pe unitatea de timp :

$$F \sim Q_m v = \rho\, db\, v \cdot v = \rho\, db\, v^2. \tag{13.47}$$

Din aceste două expresii rezultă

$$d \cong \sqrt{\frac{h\eta}{\rho v}}. \tag{13.48}$$

Dacă considerăm raportul hb/d din (13.46) ca o lungime caracteristică l a corpului, atunci forța de frecare (13.46) devine

$$F = \text{const.}\ \eta l v \quad \text{(legea lui Stokes).} \tag{13.49}$$

Legea lui Stokes. *Forța de frecare F întîmpinată de corp (în regim laminar de curgere) este proporțională cu viscozitatea fluidului η, cu dimensiunea liniară caracteristică l a corpului și cu viteza sa v.*

În cazul sferei se obține *formula lui Stokes* :

$$F = 6\pi\eta r v, \tag{13.50}$$

unde r este raza sferei.

13.6.2. VITEZA LIMITĂ

Cu ajutorul formulei lui Stokes se poate calcula *viteza limită* pe care o atinge un corp sferic în cădere liberă într-un fluid. La început viteza fiind mică, forța de frecare Stokes este mică și corpul cade accelerat sub acțiunea greutății aparente. Pe măsură ce crește viteza, crește și forța de frecare Stokes (13.50) pînă cînd devine egală cu greutatea aparentă și sfera coboară atunci uniform cu viteza limită (fig. 13.16) :

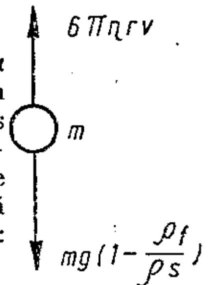


Fig. 13.16

$$6\pi\eta r v = mg(1 - \rho_f/\rho_s) = (\rho_s - \rho_f)\frac{4\pi r^3}{3} g,$$

de unde viteza limită

$$v = \frac{2}{9\eta}(\rho_s - \rho_f)gr^2. \qquad (13.51)$$

Viteza limită este proporţională cu pătratul razei. Ea se atinge practic foarte repede.

Pentru particule foarte mici, viteza va fi foarte mică (ceaţă, nori, praf fin). Formula (13.51) a fost folosită de Millikan pentru determinarea sarcinii electronului.

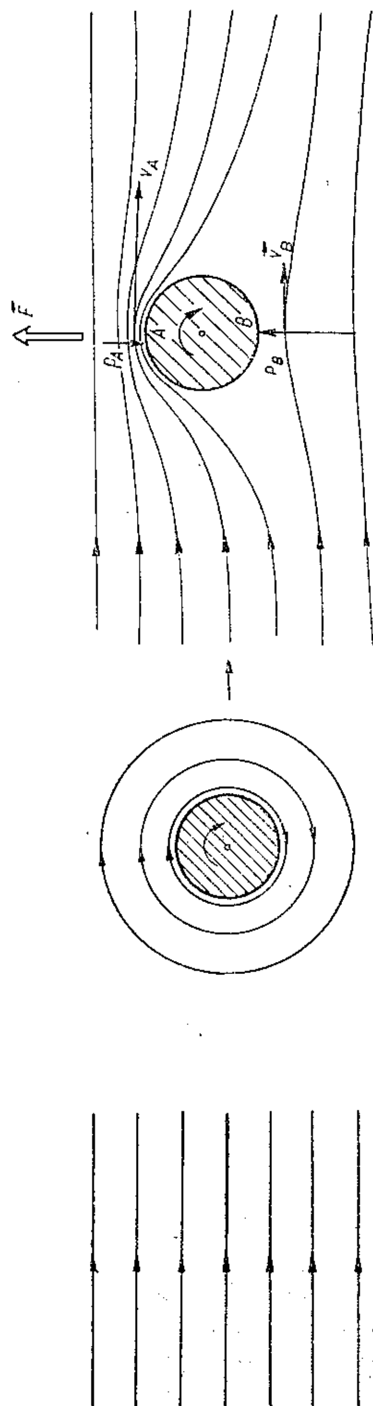


Fig. 13.17

13.7. EFECTUL MAGNUS

Fie un cilindru în rotaţie aşezat într-un curent de fluid, în regim laminar, perpendicular pe axa cilindrului (fig. 13.17).

Datorită forţelor de frecare (viscozităţii) cilindrul antrenează straturile de fluid din vecinătatea sa, în sensul mişcării sale de rotaţie. În punctul A viteza fluidului va fi mai mare decît în punctul B, unde cilindrul se roteşte în sens invers curgerii fluidului. Conform legii lui Bernoulli, presiunea statică laterală asupra cilindrului va fi mai mare în B decît în A, astfel încît apare o *forţă rezultantă transversală spre partea unde viteza fluidului este mai mare.* Acesta este *efectul Magnus.*

Ca regulă practică *corpul este împins transversal din regiunea cu liniile de curent rare spre regiunea cu liniile de curent dese.*

Efectul poate fi ilustrat punînd în rotaţie un cilindru de carton şi aruncîndu-l orizontal. După sensul rotaţiei, traiectoria cilindrului va curba lin sau brusc spre pămînt (fig. 13.18). Se poate folosi şi un plan înclinat pe care se rostogoleşte (şi lunecă) un cilindru.

O altă experienţă se poate face cu un mosor din carton uşor peste care este înfăşurată o bandă subţire şi uşoară de pînză, ca în fig. 13.19. Trăgînd brusc orizontal banda de pînză (fixată de un beţişor ţinut orizontal), mosorul se va roti foarte repede şi va luneca. Părăsind masa, în loc să cadă după parabolă, mosorul va zbura în sus descriind o buclă.

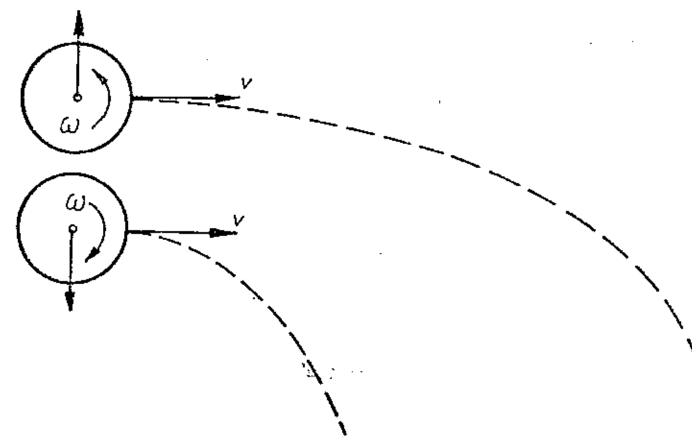


Fig. 13.18

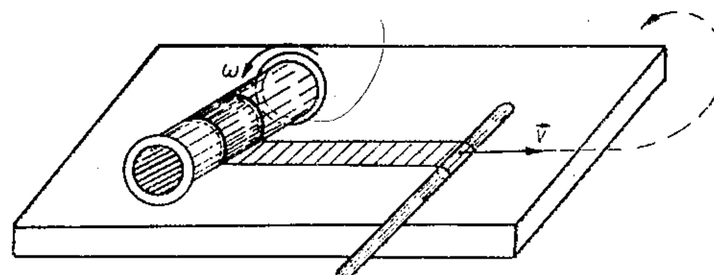


Fig. 13.19

13.8. CURGEREA TURBULENTĂ

13.8.1. FORMULA LUI NEWTON

Dacă viteza de curgere depăşeşte o valoare critică, regimul laminar devine instabil şi trece în regim turbulent. Se formează vîrtejuri, a căror origine este legată de forţele de frecare (viscozitate). Liniile de curent dispar; întreaga masă de fluid se mişcă dezordonat. Viteza nu mai este o funcţie continuă de punct. Curgerea devine nestaţionară. Viteza şi presiunea variază în fiecare punct, fluctuează în jurul unor valori medii. Forţa de rezistenţă exercitată asupra obiectelor creşte şi *devine proporţională cu densitatea fluidului şi cu pătratul vitezei.*

În adevăr, la viteze mici, în regim laminar, predomină forţele de *frecare* care depind de viscozitatea η, de viteza relativă v a fluidului faţă de corp şi de dimensiunile liniare l ale corpului. Din consideraţii dimensionale rezultă uşor legea lui Stokes:

$$F = \text{const. } \eta^{\alpha} l^{\beta} v^{\gamma}, \quad LMT^{-2} = (L^{-1}MT^{-1})^{\alpha} L^{\beta} (LT^{-1})^{\gamma},$$

de unde $\alpha = 1, \ \gamma = 1, \ \beta = 1,$

$$F = \text{const. } \eta l v \text{ (legea Stokes).} \qquad (13.52)$$

La viteze mari, în regim turbulent, predomină efectele inerțiale, datorite energiei cinetice sau presiunii dinamice. Vîrtejurile consumă energie cinetică de rotație în dauna energiei cinetice de translație a lichidului. Formarea vîrtejurilor în urma corpului (fig. 13.20) duce la o creștere a forței de rezis-

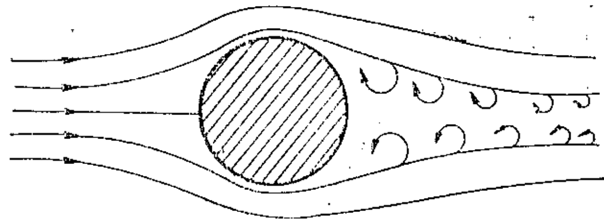


Fig. 13.20

tență la curgere față de regimul laminar. Vîrtejurile se amortizează treptat, energia lor cinetică transformîndu-se în căldură (în energia internă a fluidului). Viscozitatea se manifestă doar într-un strat limită foarte subțire.

Din considerații dimensionale rezultă ușor *formula lui Newton*:

$$F = \text{const}\cdot l^{\alpha}v^{\beta}\rho^{\gamma},\quad LMT^{-2} = L^{\alpha}(LT^{-1})^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma},$$

de unde $\gamma = 1,\ \beta = 2,\ \alpha = 2$;

$$F = \frac{1}{2}CS\rho v^2 \text{ (formula lui Newton)}, \tag{13.53}$$

unde C este o constantă adimensională, sensibilă la forma corpului (fig. 13.21), S — aria secțiunii transversale.

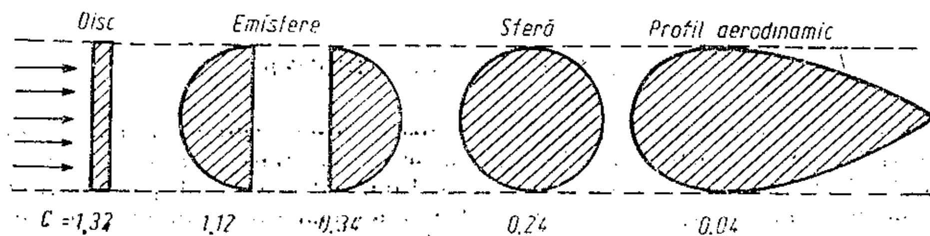


Fig. 13.21

Forța de rezistență F este proporțională cu aria transversală S opusă fluidului, cu densitatea ρ a fluidului și cu pătratul vitezei v (cu presiunea dinamică $\rho v^2/2$).

Trebuie observat că la *orice* viteze (la orice regim, laminar sau turbulent), în forța de rezistență contribuie ambele efecte, al viscozității și al energiei cinetice, numai că la viteze mici predomină primul efect (energia cinetică sau presiunea dinamică este neglijabilă față de forțele de frecare internă datorite viscozității), iar la viteze mari predomină al doilea efect.

Viteza limită de cădere liberă a unui corp într-un fluid (aer), în regim turbulent (de exemplu, parașută), va fi:

$$\frac{1}{2}CS\rho_f v^2 = mg(1 - \rho_f/\rho_s),\quad v = \sqrt{\frac{2Vg}{CS}(\rho_s/\rho_f - 1)} \tag{13.54}$$

și în cazul unei sfere ($C = 0{,}24$) (R — raza sferei):

$$v = \frac{1}{0{,}6}\sqrt{Rg(\rho_s/\rho_f - 1)} = 1{,}67\sqrt{Rg(\rho_s/\rho_f - 1)}. \tag{13.55}$$

Az utolsó három képlet csak akkor érvényes ha a zuhanó test egy... (tehát ejtőernyős ejtőernyőjére nem érvényes) Arkhimédész nélkül: $v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_f CS}}$

13.8.2. NUMĂRUL LUI REYNOLDS

Trecerea de la regim laminar la cel turbulent trebuie să aibă loc la viteze pentru care cele două forțe (13.52), (13.53) devin comparabile între ele:

$$C_1\eta l v \sim C_2\rho v^2 l^2,\quad \frac{l\rho v}{\eta} \sim \frac{C_1}{C_2}. \tag{13.56}$$

Raportul adimensional

$$\mathrm{Re} = \frac{l\rho v}{\eta} = \frac{lv}{\nu} \tag{13.57}$$

se numește *numărul (cifra) lui O. Reynolds* (1883).

Experiența arată că trecerea de la regimul laminar la cel turbulent are loc pentru anumite valori ale numărului Reynolds, și anume, conform condiției (13.56) pentru $\mathrm{Re} \sim C_1/C_2$, dar această valoare critică a numărului Reynolds C_1/C_2 trebuie determinată experimental, întrucît nu cunoaștem constantele C_1, C_2 din cele două legi ale forței de rezistență, constante care sînt sensibile la forma corpului.

Astfel, pentru conducte tubulare cu pereți netezi această valoare critică a numărului Re este (D — diametrul conductei):

$$\mathrm{Re} = \frac{Dv}{\nu} \approx 2\,300. \tag{13.58}$$

Deci regimul turbulent apare la viteze suficient de mari sau la diametre mari (pentru un fluid *ideal* $\mathrm{Re} \to \infty$).

În general forța de rezistență se poate scrie sub forma:

$$F = f(\mathrm{Re})\cdot\rho v^2 S, \tag{13.59}$$

unde $f(\mathrm{Re})$ este o funcție adimensională de numărul lui Reynolds. De exemplu, în cazul legii Stokes (regim laminar) pentru sferă:

$$f(\mathrm{Re}) = \frac{12}{\mathrm{Re}}, \tag{13.60}$$

și condiția de valabilitate a legii Stokes este: $\mathrm{Re} \ll 1$.

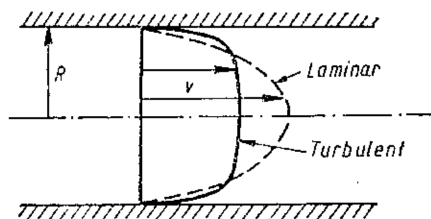


Fig. 13.22

În cazul curgerii turbulente printr-un tub, distribuţia vitezelor *medii* pe secţiunea tubului este complet diferită de legea parabolică Poiseuille de la curgerea laminară (fig. 13.22):

$$v/v_m = 1 - (r/R)^7. \qquad (13.61)$$

13.8.3. TEORIA SIMILITUDINII

Mişcările care diferă prin parametrii ρ, η, v, l, dar au acelaşi număr Reynolds, se numesc *asemenea*. Întregul tablou al mişcării fluidului diferă atunci doar prin *scara* caracteristicilor sale. Astfel, comportarea avionului poate fi studiată pe modele în tunele aerodinamice (în aviaţie, numărul Re ajunge la $\sim 10^6$).

Există şi alte numere adimensionale folosite în teoria similitudinii. De exemplu, la plutirea vaselor, alături de forţele de rezistenţă proporţionale cu $\rho l^2 v^2$, joacă rol forţa arhimedică $\rho l^3 g$. Două plutiri vor fi asemenea dacă raportul acestor forţe

$$\mathrm{Fr} = \frac{v^2}{lg}, \qquad (13.62)$$

numit *numărul lui Froude* (1870), este acelaşi.

La viteze de ordinul vitezei sunetului, rezistenţa este proporţională aproximativ cu *cubul* vitezei pentru ca la viteze supersonice să devină din nou proporţională cu pătratul vitezei.

13.8.4. ARIPA DE AVION

În cazul *aripii de avion* (fig. 13.23) apare o forţă rezultantă a cărei componentă orizontală R, numită *rezistenţă frontală*, trebuie învinsă prin acţiunea elicei, şi o componentă verticală, numită *portanţă* (sau forţă portantă; ea este denumită şi forţă ascensională *dinamică* spre deosebire de cea statică din legea lui Arhimede), care învinge greutatea avionului (γ este unghiul de atac).

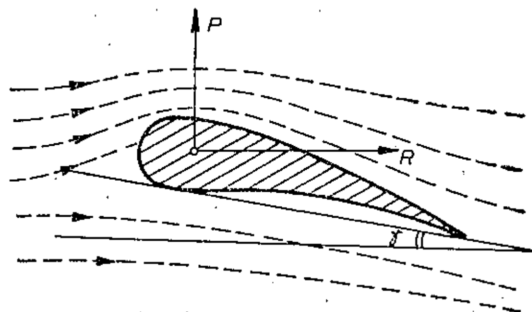


Fig. 13.23

Şi aici se aplică regula practică: *corpul este împins transversal din regiunea cu liniile de curent rare spre regiunea cu liniile de curent dese.*

PROBLEME

13.1. Un vas cubic este umplut complet cu un lichid, greutatea lichidului fiind G. Să se afle forţa de presiune rezultantă exercitată de lichid asupra unui perete lateral al vasului. Unde se află punctul de aplicaţie al acestei forţe?

R. $F = G/2$, $h = l/3$.

13.2. Un corp pluteşte pe suprafaţa mercurului (de densitate ρ) astfel încît este cufundată o fracţiune k din volumul său. Ce fracţiune k' din volumul corpului va fi cufundată în mercur, dacă se toarnă deasupra apă pînă se acoperă corpul?

R. $k' = \dfrac{\rho k - \rho_0}{\rho - \rho_0}$.

13.3. Pe suprafaţa unui lichid de densitate ρ_0 pluteşte o cană cu pereţi foarte subţiri, de secţiune S, umplută parţial cu acelaşi lichid. În cană se introduce un corp de greutate G, care pluteşte. Cu cît variază nivelul lichidului în exteriorul şi în interiorul cănii, faţă de cană?

R. $\Delta H = \Delta h = G/\rho_0 g S$.

13.4. Dacă o barcă (sau vapor) care pluteşte pe un lac se scufundă, ce se întîmplă cu nivelul apei din lac?

R. Scade.

13.5. Într-un vas cu apă pluteşte o bucată de gheaţă care conţine în interior incluziuni, de exemplu o bucată de plută. Cum se schimbă nivelul apei din vas în timpul topirii gheţii?

R. Pentru incluziuni cu $\rho < \rho_{apă}$ nivelul nu se schimbă; pentru incluziuni cu $\rho > \rho_{apă}$ nivelul va scădea.

13.6. Un disc de gheaţă de secţiune S şi grosime h pluteşte pe apă. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a cufunda complet discul în apă?

R. $W = \dfrac{gS}{2\rho_0} h^2(\rho_0 - \rho)^2$.

13.7. O bilă urcă cu viteză constantă într-un lichid a cărui densitate este de n ori mai mare decît a bilei. De cîte ori forţa de rezistenţă este mai mare decît greutatea bilei?

R. $F_r/G = \rho_l/\rho_c - 1 = n - 1$.

13.8. O tijă subţire omogenă de greutate G are un capăt fixat într-o articulaţie de peretele interior al unui vas, celălalt capăt fiind cufundat în lichidul din vas de densitate ρ_0. Tija se poate roti liber fără frecare în articulaţie. Să se afle densitatea ρ a tijei dacă la echilibru lungimea rămasă afară reprezintă o fracţiune k din lungimea tijei. Care este forţa de reacţiune din articulaţie?

R. $\rho = \rho_0(1 - k^2)$, $\vec{F} = -\vec{G}\dfrac{k}{1+k}$.

13.9. Într-un vas închis, umplut cu lichid, cîteva corpuri plutesc şi cîteva corpuri stau pe fundul vasului. Cum se vor deplasa corpurile, dacă punem vasul într-o maşină centrifugă?

R. Corpurile care plutesc se deplasează spre centru, iar cele de pe fundul vasului spre periferie.

13.10. Un vas cilindric de rază R conţine un lichid de densitate ρ şi se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale. Să se afle ecuaţia suprafeţei libere a lichidului şi presiunea în lichid (fig. 13.24).

R. $z = h + \dfrac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) = h + \dfrac{\omega^2}{2g} r^2$ — paraboloid de revoluţie cu axa verticală;

$$p = \rho g(h - z) + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2).$$

13.11. Să se afle debitul volumic Q_v al unui lichid, știind diferența de nivel Δh și secțiunile respective S_1, S_2 din dispozitivul din figura 13.25.

R. $Q_v = S_1 S_2 \sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}$.

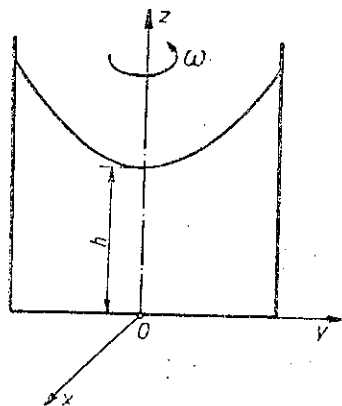


Fig. 13.24

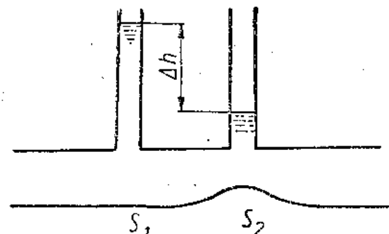


Fig. 13.25

13.12. Printr-un tub cu gîtuitură cu secțiunile S_1, S_2 se suflă aer (de densitate ρ) cu debitul volumic Q_v. Să se afle diferența de nivel a apei dintr-un manometru în formă de U, ca în figura 13.26.

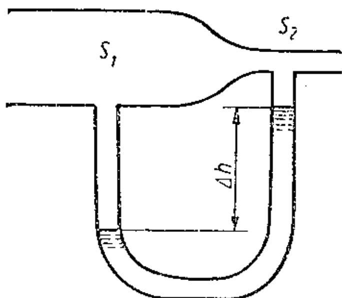


Fig. 13.26

R. $\Delta h = \dfrac{Q_v^2}{2g} \dfrac{\rho}{\rho_0} \dfrac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 S_2^2}$.

13.13. În cît timp se evacuează serul dintr-o seringă ținută orizontal, dacă asupra pistonului se apasă cu o forță constantă F? Secțiunea tubului seringii este S_1, a orificiului este S_2, iar lungimea cursei pistonului este l.

R. $t = l\dfrac{S_1}{S_2}\sqrt{\dfrac{\rho S_1}{2F}(1 - S_2^2/S_1^2)} \approx l\dfrac{S_1}{S_2}\sqrt{\dfrac{\rho S_1}{2F}}$.

13.14. Dintr-o țeavă țîșnește un jet de apă de secțiune S_1 cu debitul volumic Q_v. Care va fi secțiunea jetului la înălțimea h deasupra capătului țevii?

R. $S_2 = \dfrac{S_1}{\sqrt{1 - 2ghS_1^2/Q_v^2}}$.

13.15. Într-un vas se toarnă uniform un lichid cu debitul volumic Q_v. Care trebuie să fie aria secțiunii orificiului din fundul vasului, pentru ca lichidul din vas să rămînă la un nivel constant h? Secțiunea vasului este mult mai mare decît aria orificiului.

R. $S = \dfrac{Q_v}{\sqrt{2gh}}$.

13.16. Un vas cilindric de înălțime H și secțiune S' este plin cu un lichid. Pe fundul vasului se află un mic orificiu de arie S. În cît timp se golește o fracțiune f din volumul vasului?

R. $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}(S'^2/S^2 - 1)}\,(1 - \sqrt{1-f}) \cong \sqrt{\dfrac{2h}{g}}\dfrac{S'}{S}(1 - \sqrt{1-f})$.

13.17. O șalupă se mișcă rectiliniu uniform, fiind propulsată cu ajutorul unui motor de tip reactiv care absoarbe apa printr-un orificiu de intrare și o ejectează printr-un orificiu de ieșire. Să se afle randamentul mecanic al motorului, știind că aria orificiului de ieșire este de n ori mai mică decît aria orificiului de intrare.

R. $\eta = \dfrac{2}{1+n}$.

13.18. O picătură de ploaie cade în aer ($\rho_{aer} = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$) cu viteză limită în regim laminar. Viscozitatea aerului este $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ daP. Știind numărul Reynolds critic de trecere de la regim laminar la cel turbulent, în condițiile date, $\mathrm{Re} = 0{,}10$, să se afle valoarea maximă a razei picăturii.

R. $r_m = \sqrt[3]{\dfrac{9\eta^2 \mathrm{Re}}{4\rho_{aer}\rho_{apă} g}} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m.

13.19. Un vas este umplut cu apă (de densitate ρ_0) și petrol (de densitate ρ). Știind grosimea stratului de apă h_0 și de petrol h, să se afle viteza de scurgere a apei printr-un mic orificiu în fundul vasului.

R. $v = \sqrt{2g(h_0 + h\rho/\rho_0)}$.

13.20. Curgerea laminară în jurul unei sfere de rază R_1, care se deplasează într-un lichid de densitate ρ_1 și viscozitate η_1, are loc pentru viteze care nu depășesc v_1. Cu ce viteză minimă v_2 trebuie să se deplaseze o bilă de rază R_2 într-un alt lichid de densitate ρ_2 și viscozitate η_2 pentru a avea loc o curgere turbulentă?

R. $v_2 = v_1 \dfrac{\rho_1 R_1 \eta_2}{\rho_2 R_2 \eta_1}$.

13.21. Printr-un tub de lungime l și rază R curge laminar un fluid viscos de densitate ρ și viscozitate η. Viteza pe axa tubului este v_0. Să se afle debitul volumic Q, energia cinetică a fluidului din tub E_c, forța de frecare dintre tub și fluid F_f și diferența de presiune dintre capetele tubului.

R. $Q = \dfrac{\pi}{2} v_0 R^2$, $E_c = \dfrac{\pi}{6} lR^2\rho v_0^2$, $F_f = 4\pi\eta l v_0$, $p_1 - p_2 = \dfrac{4\eta l v_0}{R^2}$.

13.22. Considerînd coordonata curbilinie s de-a lungul unei linii de curent, să se deducă ecuația

$$\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s,$$

unde g_s este proiecția accelerației gravitaționale $\vec{g}$ pe linia de curent. Să se arate că din această ecuație se poate obține ecuația lui Bernoulli.

13.23. Printr-un tub de secțiune S, curbat sub unghiul α, curge un lichid de densitate ρ cu debitul volumic Q. Care este reacțiunea asupra tubului curbat?

R. $F = 2\rho\dfrac{Q^2}{S}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

CAPITOLUL 14

OSCILAȚII

Oscilațiile prezintă o importanță covîrșitoare pentru fizică și tehnică, iar dintre ele cele simple, sinusoidale au rol fundamental, fiindcă orice oscilație poate fi obținută prin suprapunerea unor oscilații sinusoidale (teorema Fourier).

14.1. OSCILATORUL ARMONIC

Oscilatorul armonic este un punct material care execută oscilații sinusoidale pe o dreaptă sub acțiunea unei forțe atractive proporționale cu distanța pînă la centrul atractiv (centrul mișcării).

14.1.1. ECUAȚIILE MIȘCĂRII

Reamintim relațiile stabilite mai înainte. Elongația:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \qquad -A \leqslant x \leqslant A, \tag{14.1}$$

unde A este amplitudinea mișcării, $\varphi = \omega t + \alpha$ — faza mișcării, α — faza inițială, $\omega = 2\pi\nu$ — frecvența unghiulară, $\nu = 1/T$ — frecvența, T — perioada mișcării.

Viteza:

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= \omega A \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad -\omega A \leqslant v \leqslant \omega A, \tag{14.2}$$

viteza este defazată înainte cu $\pi/2$ (sau $T/4$) față de elongație.

Accelerația:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x = \omega^2 A \cos(\omega t + \alpha + \pi),$$

$$-\omega^2 A \leqslant a \leqslant \omega^2 A, \tag{14.3}$$

accelerația este defazată cu π (sau $T/2$) față de elongație, adică este în opoziție de fază cu elongația (fig. 14.1).

Forța:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \qquad k = m\omega^2, \tag{14.4}$$

$$\omega = \sqrt{k/m}, \qquad T = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{14.5}$$

Ecuația diferențială a oscilatorului armonic:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{14.6}$$

Mișcarea armonică poate fi reprezentată geometric prin proiecția pe o axă a unui „vector" (fazor) de modul A care se rotește în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω (fig. 14.2). Proiecția A' a extremității acestui vector execută mișcarea armonică (14.1).

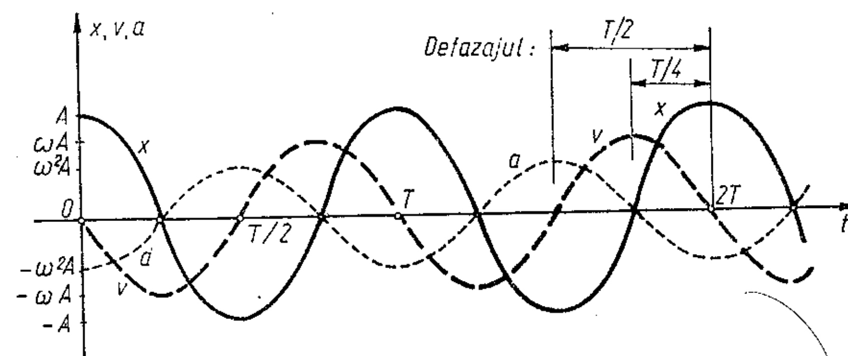


Fig. 14.1

Analog, viteza și accelerația în mișcarea armonică sînt date în fiecare moment de proiecțiile extremității vectorilor de modul ωA, $\omega^2 A$, defazați cu $\pi/2$, respectiv π față de vectorul A (fig. 14.2). Ne putem imagina, de asemenea, că în loc să se rotească vectorii, se rotește axa OX în sens invers.

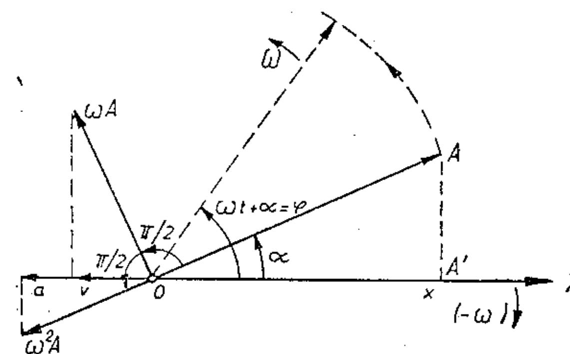


Fig. 14.2

14.1.2. ENERGIILE

Energia cinetică, E_c, potențială U și totală E a oscilatorului armonic sînt:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \tag{14.7}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \tag{14.8}$$

$$E_{c\,max} = U_{max},$$

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{14.9}$$

Energia totală este constantă (se conservă) și este proporțională cu pătratul amplitudinii și cu pătratul frecvenței.

Energia potențială U se reprezintă printr-o parabolă, iar forța

$$F = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x = -kx \qquad (14.10)$$

printr-o dreaptă (fig. 14.3). Forța se anulează acolo unde energia potențială este minimă.

14.1.3. ENERGII MEDII

Reamintim definiția *valorii medii* a unei mărimi, de exemplu $x = f(t)$ (fig. 14.4):

$$\langle x \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\ \langle x \rangle (b-a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = S, \qquad (14.11)$$

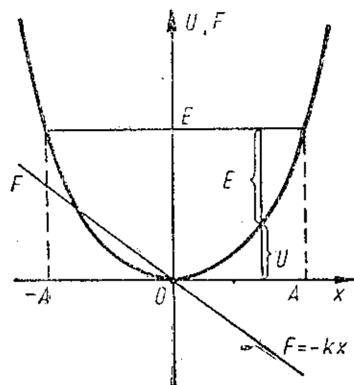


Fig. 14.3

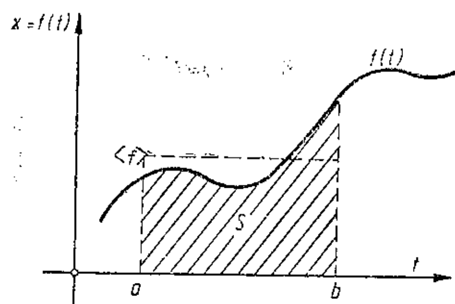


Fig. 14.4

adică aria dreptunghiului avînd înălțimea $\langle f \rangle$ și baza $b - a$ este egală cu aria S mărginită de curba $f(t)$, ca și cum am „netezi“ curba $f(t)$ pe porțiunea (a, b) astfel ca să obținem cu o curbă „orizontală“ $\langle f \rangle = \mathrm{const}$ aceeași arie.

Valoarea medie depinde de intervalul pe care se face media.

Pentru funcțiile *periodice*, intervalul de mediere se ia egal cu *perioada* (dacă nu se specifică contrariul).

Din definiția valorii medii (14.11) rezultă imediat următoarele proprietăți ale valorilor medii:

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle,\ \langle \mathrm{const}\cdot f \rangle = \mathrm{const}\cdot\langle f \rangle, \qquad (14.12)$$

dar în general $\langle f\cdot g \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle$.

Deoarece valoarea medie a sinusului sau cosinusului pe o perioadă este evident nulă, rezultă imediat:

$$\langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}(1 - \langle \cos 2\varphi \rangle) = \frac{1}{2};\ \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}(1 + \langle \cos 2\varphi \rangle) = \frac{1}{2},$$

$$\langle \sin(\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \beta) \rangle = \langle \cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \beta) \rangle = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta),$$

$$\langle \sin(\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \beta) \rangle = \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta). \qquad (14.13)$$

Energia cinetică medie este egală cu energia potențială medie:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{1}{4}\ m\omega^2 A^2 = \frac{E}{2},$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2}\ m\omega^2 A^2 \langle \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{1}{4}\ m\omega^2 A^2 = \frac{E}{2}. \qquad (14.14)$$

14.1.4. ARMONICITATEA OSCILAȚIILOR MICI

Mișcarea armonică joacă un rol important în fizică. Dacă o particulă (de exemplu, atom, ion) este deplasată din poziția sa de echilibru, în care forța este nulă, apare imediat o forță din partea sistemului (de exemplu, cristalului) orientată înapoi spre poziția de echilibru. Pentru deplasări mici forța este practic proporțională cu deplasarea (primul termen al dezvoltării în serie de puteri Taylor), adică curba forței poate fi aproximată în jurul poziției de echilibru printr-o dreaptă, iar energia potențială printr-o parabolă. Prin urmare, *oscilațiile mici sînt totdeauna armonice*. Efectele anarmonice apar la oscilații de amplitudine mare.

Observație. În mecanica cuantică se arată că energia totală a unui oscilator armonic este *cuantificată*, adică poate lua un șir discret de valori:

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad (14.15)$$

unde ω este frecvența unghiulară, $\hbar = h/2\pi = 1{,}0545\cdot 10^{-34}$ J·s, iar $h = 6{,}6256\cdot 10^{-34}$ J·s este constanta lui Planck.

Exemple. Reamintim exemplele date mai înainte de oscilații armonice.

1. *Pendulul elastic.* Un corp de masă m suspendat pe un resort de constantă elastică k efectuează oscilații verticale (fig. 14.5, *a*):

$$F = -kx,\ T = 2\pi\sqrt{m/k}. \qquad (14.16)$$

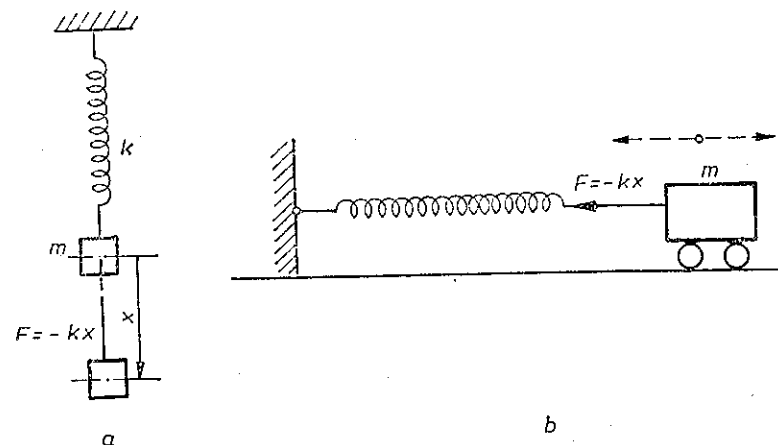


Fig. 14.5

Bineînțeles, poziția de echilibru corespunde resortului alungit cu $x_0 = mg/k$.

Putem fixa resortul orizontal, punînd corpul pe un suport cu rotile ca în figura 14.5, *b*. Atunci corpul efectuează oscilații pe o dreaptă orizontală (poziția de echilibru corespunde resortului nedeformat).

2. *Pendulul simplu (matematic) gravitațional.* **Componenta** $mg \cos\theta$ **a greutății compusă cu reacțiunea firului dă accelerația normală (centripetă) (fig. 14.6). Componenta** $F_t = mg \sin\theta \approx \approx mg\,\theta$ (pentru unghiuri mici) dă accelerația tangențială. Coordonata fiind $x \cong l\theta$, rezultă că forța este de tip elastic:

$$F_t \cong -\frac{mg}{l}x = -kx,\ k = \frac{mg}{l},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (14.17)$$

3. *Pendulul fizic* (fig. 14.7). Ecuația mișcării de rotație:

$$M = -mg\,l \sin\theta = I\varepsilon = I\ddot{\theta},$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mg}{I}\theta = 0 \text{ (oscilații mici)}, \qquad (14.18)$$

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\,l}}. \qquad (14.19)$$

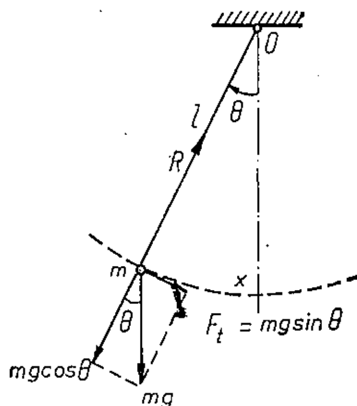


Fig. 14.6

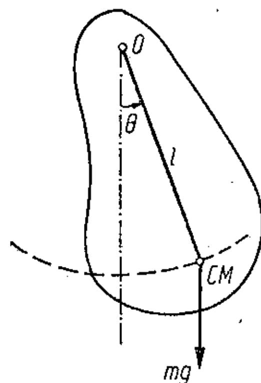


Fig. 14.7

4. *Pendulul de torsiune* (fig. 14.8). Momentul forțelor elastice (12.38), (12.42):

$$M = -\frac{\pi G}{2l}R^4\theta = -C\theta \quad \text{(unghiuri mici)}, \qquad (14.20)$$

ecuația oscilațiilor de torsiune:

$$-C\theta = I\ddot{\theta},\ \ddot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0.$$

$$\omega^2 = \frac{C}{I},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}. \qquad (14.21)$$

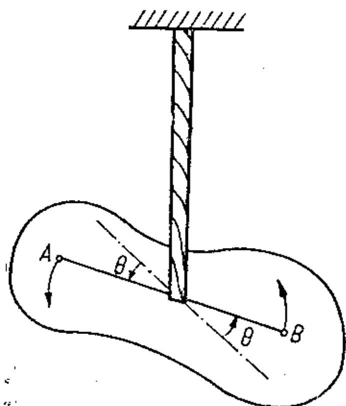


Fig. 14.8

14.1.5. LEGEA IZOCRONISMULUI

Subliniem că *frecvența oscilațiilor armonice depinde numai de proprietățile sistemului oscilant (constantele k, m) și nu depinde de amplitudinea sau faza oscilațiilor.* Aceasta este **legea izocronismului micilor oscilații:** *oscilațiile mici sînt izocrone,* adică perioada lor nu depinde de amplitudinea oscilațiilor.

Dimpotrivă, *amplitudinea oscilațiilor depinde de condițiile inițiale ale mișcării,* adică de elongația și viteza punctului material la un moment inițial dat.

Anume, în baza lui (14.1—2), avem pentru $t = 0$:

$$x_0 = A\cos\alpha,\ v_0 = -\omega A \sin\alpha,$$

de unde amplitudinea și faza inițială:

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2},\quad \text{tg}\,\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \qquad (14.22)$$

14.2. REPREZENTAREA COMPLEXĂ A OSCILAȚIILOR SINUSOIDALE

Oscilațiile armonice, sinusoidale, pot fi reprezentate și ca parte reală (sau imaginară) a unui număr complex de modul A și de argument egal cu faza oscilației $\varphi = \omega t + \alpha$.

14.2.1. NUMERE COMPLEXE

În adevăr, un număr complex $z \overset{\text{def}}{=} a + ib$ $(a,\ b \in R,\ i^2 = -1)$ se reprezintă în planul complex z (fig. 14.9) printr-un punct sau prin vectorul respectiv. (A nu se confunda planul reprezentării numerelor complexe cu planul real. În planul complex z numai axa OR este reală.)

Notăm partea reală, partea imaginară, modulul și argumentul numărului complex z astfel:

$$a = \text{Re}\{z\} = \text{Re}\{a + ib\},$$
$$b = \text{Im}\{z\} = \text{Im}\{a + ib\}, \qquad (14.23)$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg z = \theta = \text{arc tg}\frac{b}{a}.$$

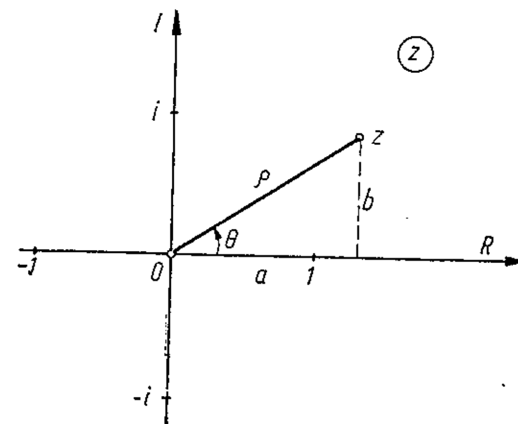


Fig. 14.9

În baza formulelor lui Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \qquad (14.24)$$

putem scrie

$$z = a + i\,b = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} = |z|\,e^{i\arg z}.\ |e^{i\theta}| = 1. \qquad (14.25)$$

14.2.2. REPREZENTAREA COMPLEXĂ

Dacă acum privim vectorii din figura 14.2 ca reprezentînd numere complexe în planul complex, axa OX fiind considerată axă reală, putem scrie

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\{A\,e^{i(\omega t+\alpha)}\} = \mathrm{Re}\{\bar{A}\,e^{i\omega t}\}, \qquad (14.26)$$

unde

$$\bar{A} \overset{\text{def}}{=} A\,e^{i\alpha},\ |\bar{A}| = A \text{ (reamintim că } |e^{i\alpha}| = 1) \qquad (14.27)$$

este *amplitudinea complexă*: modulul ei dă amplitudinea obișnuită reală A, iar argumentul ei dă faza inițială α. Factorul temporal $e^{i\omega t}$ este util să-l separăm, punîndu-l în evidență (uneori este chiar omis în calculele intermediare, punîndu-l la nevoie în rezultatul final).

Deoarece operația de luare a părții reale Re este comutativă cu operația de sumare Σ:

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_k z_k\right\} = \sum_k \mathrm{Re}\{z_k\} \qquad (14.28)$$

sau

$$\mathrm{Re}\{z_1 + z_2 + \ldots\} = \mathrm{Re}\{z_1\} + \mathrm{Re}\{z_2\} + \ldots,$$

putem face întîi operațiile de adunare algebrică, înmulțire cu numere *reale*, derivare sau integrare asupra numerelor complexe reprezentative și apoi, la sfîrșit, să luăm partea reală a rezultatului obținut. Acest procedeu prezintă avantaje, deoarece operațiile cu funcțiile exponențiale (mai ales derivările și integrările) sînt mai ușoare decît cele cu funcțiile trigonometrice. Pentru simplificare, semnul Re de obicei se omite în calculele intermediare, scriindu-l la nevoie doar în rezultatul final.

Vom nota numărul complex reprezentativ cu aceeași literă ca și mărimea reală reprezentată dar cu o bară deasupra.

14.2.3. REGULA DE DERIVARE

Derivarea mărimilor sinusoidale în raport cu timpul revine la înmulțirea lor cu $i\omega = \omega e^{i\pi/2}$ (unde $i = e^{i\pi/2}$), adică la înmulțirea lor cu ω și *defazarea cu $\pi/2$ înainte.*

Mai general, înmulțirea cu un număr complex $\rho e^{i\theta}$ înseamnă amplificarea cu ρ și *defazarea* înainte cu θ.

De exemplu, pentru viteză avem:

$$\bar{v} = \dot{\bar{x}} = (\bar{A}\,e^{i\omega t})^{\cdot} = i\,\omega\,\bar{A}\,e^{i\omega t} = i\,\omega\bar{x} = \omega\bar{A}\,e^{i(\omega t+\pi/2)} =$$
$$= \omega A\,e^{i(\omega t+\alpha+\pi/2)}, \qquad (14.29)$$

de unde viteza reală:

$$v = \mathrm{Re}\{\omega A\,e^{i(\omega t+\alpha+\pi/2)}\} = \omega A\cos(\omega t + \alpha + \pi/2).$$

În figura 14.2 se vede clar cum vectorul amplitudinii a fost înmulțit cu ω și rotit în sens trigonometric cu $\pi/2$ pentru a da vectorul vitezei.

Pentru accelerație avem:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = i\,\omega\,\bar{v} = i\,\omega\dot{\bar{x}} = i\,\omega(i\,\omega\bar{x}) = -\omega^2\bar{x} = -\omega^2\bar{A}e^{i\omega t} =$$
$$= \omega^2 A\,e^{i(\omega t+\alpha+\pi)},\quad (-1 = e^{i\pi}), \qquad (14.30)$$

de unde accelerația reală:

$$a = \mathrm{Re}\{\omega^2 A\,e^{i(\omega t+\alpha+\pi)}\} = \omega^2 A\cos(\omega t + \alpha + \pi).$$

În figura 14.2 se vede cum prin derivare vectorul vitezei a fost amplificat cu ω și rotit în sens trigonometric cu $\pi/2$.

14.2.4. EXPRESIA ENERGIEI

Energia nefiind liniară, ci pătratică în amplitudine, nu se pot înmulți direct numerele complexe reprezentative, deoarece $\mathrm{Re}\{z^2\} \neq [\mathrm{Re}\{z\}]^2$. Putem însă ocoli dificultatea folosind numerele *complex conjugate*:

$$z = a + i\,b = \rho\,e^{i\theta},\ z^* = a - i\,b = \rho\,e^{-i\theta}, \qquad (14.31)$$

(* — conjugarea complexă),

$$zz^* = a^2 + b^2 = \rho^2 = |z|^2,\ z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\{z\}, \qquad (14.32)$$

$$(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*,\ (z^*)^* = z.$$

Deoarece modulul numărului complex reprezentativ este egal cu amplitudinea mărimii respective (adică egal cu valoarea maximă), de exemplu:

$$|\bar{x}|^2 = \bar{x}\bar{x}^* = \bar{A}\bar{A}^* = |\bar{A}|^2 = A^2,\ |\bar{v}|^2 = \bar{v}\bar{v}^* = \omega^2A^2, \qquad (14.33)$$

rezultă că energiile medii (14.14) și energia totală se scriu astfel:

$$\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}\bar{v}\bar{v}^* = \frac{1}{2}|\bar{v}|^2,\ \langle E_c\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\bar{v}\bar{v}^*}{2},$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}\bar{x}\bar{x}^* = \frac{1}{2}|\bar{x}|^2,\ \langle U\rangle = \frac{1}{2}k\frac{\bar{x}\bar{x}^*}{2}, \qquad (14.34)$$

$$E = \langle E_c\rangle + \langle U\rangle = \frac{1}{2}m\,\bar{v}\bar{v}^* = \frac{1}{2}k\,\bar{x}\bar{x}^* = \frac{1}{2}m|\bar{v}|^2 = \frac{1}{2}k|\bar{x}|^2. \qquad (14.35)$$

Reprezentarea complexă a oscilațiilor armonice se folosește curent în electrotehnică și în electrodinamică.

14.3. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PARALELE

14.3.1. TRATAREA ANALITICĂ

Să considerăm mai întîi compunerea a două oscilații de aceeași direcție (paralele) și de *aceeași frecvență* (suprapunerea oscilațiilor paralele).

Rezultatul este tot o oscilaţie armonică de aceeaşi direcţie şi de aceeaşi frecvenţă. În adevăr,

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (14.36)$$

unde A, α sînt amplitudinea şi faza iniţială a oscilaţiei rezultante. Dezvoltînd cosinusurile şi făcînd identificările avem:

$$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 = A \cos \alpha, \quad A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 = A \sin \alpha,$$

de unde rezultă amplitudinea A şi faza iniţială α a oscilaţiei rezultante:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{A}(A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2),$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{A}(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2), \quad (14.37)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Acelaşi rezultat se obţine cu ajutorul reprezentării complexe:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)} = \bar{A}_1 e^{i\omega t} + \bar{A}_2 e^{i\omega t} =$$

$$= (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) e^{i\omega t} = \bar{A} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \alpha)},$$

$$\bar{A} = A e^{i\alpha} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}. \quad (14.38)$$

După cum am spus, de obicei, scriem direct ultima relaţie, omiţînd de la bun început factorul temporal $e^{i\omega t}$.

Cum modulul şi argumentul unui număr complex sînt date de (14.23), (14.32), obţinem imediat amplitudinea şi faza iniţială a oscilaţiei rezultante:

$$A^2 = \bar{A}\bar{A}^* = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)^* = \bar{A}_1\bar{A}_1^* + \bar{A}_2\bar{A}_2^* + \bar{A}_1\bar{A}_2^* +$$

$$+ \bar{A}_1^*\bar{A}_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \operatorname{Re}\{\bar{A}_1\bar{A}_2^*\} = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2);$$

$$\bar{A} = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + i(A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2),$$

$$A = |\bar{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (14.39)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \arg \bar{A} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

14.3.2. TRATAREA GRAFICĂ

Grafic, compunerea oscilaţiilor sinusoidale revine la compunerea vectorilor reprezentativi după regula paralelogramului (*construcţia grafică a lui Fresnel*, fig. 14.10). În adevăr, suma (algebrică a) proiecţiilor mai multor vectori este egală cu proiecţia rezultantei lor (liniei de închidere a poligonului format cu vectorii respectivi). Astfel, din triunghiul OA_1A avem, conform teoremei cosinusului:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)) =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

iar din triunghiul OAC avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{BC + AB}{OD + DC} =$$

$$= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

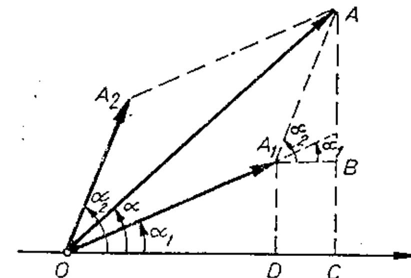


Fig. 14.10

Amplitudinea oscilaţiei rezultante depinde de diferenţa de fază $\alpha_2 - \alpha_1$ a oscilaţiilor componente. Astfel, de exemplu:

$$A = A_1 + A_2 \text{ pentru } \alpha_2 - \alpha_1 = 2n\pi,$$

$$A = |A_1 - A_2| \text{ pentru } \alpha_2 - \alpha_1 = (2n - 1)\pi, \ (n \text{ — număr întreg}). \quad (14.40)$$

În primul caz oscilaţiile sînt în fază şi amplitudinea rezultantă este egală cu suma amplitudinilor componente (amplitudinile se adună), în ultimul caz oscilaţiile sînt în opoziţie de fază şi amplitudinea rezultantă este egală cu diferenţa amplitudinilor componente (amplitudinile se scad).

14.3.3. FENOMENUL BĂTĂILOR

Dacă frecvenţele oscilaţiilor componente *diferă* între ele, oscilaţia rezultantă nu mai este armonică. În adevăr, vectorii reprezentativi se rotesc cu viteze unghiulare diferite, deci unghiul dintre ei variază, dar atunci rezultanta lor variază ca modul şi totodată nu se roteşte uniform, ceea ce ar însemna amplitudine şi frecvenţă *variabile*.

În cazul particular $A_1 = A_2$, deşi amplitudinea rezultantă este variabilă, frecvenţa rezultantă este constantă. Paralelogramul devine romb (fig. 14.11), astfel încît amplitudinea şi faza oscilaţiei rezultante rezultă direct din construcţia grafică:

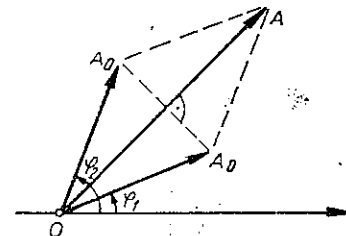


Fig. 14.11

$$A = 2A_0 \left| \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \right| =$$

$$= 2A_0 \left| \cos \frac{1}{2}\{(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1\} \right|,$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (14.41)$$

sau transformînd direct suma de cosinusuri în produs:

$$x = A_0 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_0 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) =$$
$$= 2 A_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]. \quad (14.42)$$

Rezultatul acesta se poate obține și cu ajutorul numerelor complexe, scoțînd „forțat“ factorul temporal $e^{i\left[\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t + \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\right]}$ și anume:

$$\tilde{x} = A_0 e^{i(\omega_1 t+\alpha_1)} + A_0 e^{i(\omega_2 t+\alpha_2)} = 2A_0 \exp i\frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t + \alpha_1 + \alpha_2]\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{2}\left\{\exp i\frac{1}{2}[(\omega_1 - \omega_2)t + \alpha_1 - \alpha_2] + \exp i\frac{1}{2}[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]\right\}.$$

Primul factor temporal dă oscilația sinusoidală de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, iar paranteza mare dă amplitudinea (conform formulei lui Euler pentru cos θ).

Schimbînd convenabil originea timpului (momentul inițial), putem desființa faza $\alpha_2 - \alpha_1$ și obținem astfel expresia mai simplă:

$$x = 2A_0 \cos\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\cdot\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \alpha\right]. \quad (14.43)$$

Observăm că *amplitudinea* oscilațiilor este dată de (14.41), adică de *modulul* cosinusului respectiv.

În cazul cînd frecvențele $\omega_{1,2}$ sînt foarte apropiate între ele:

$$\omega_1 \approx \omega_2, \ |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}, \quad (14.44)$$

oscilația rezultantă va fi aproape sinusoidală, de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$, avînd însă amplitudinea *lent* variabilă cu frecvența $|\omega_2 - \omega_1|$ (modulul sinusului sau modulul cosinusului are frecvență dublă), conform lui (14.43). Acesta este *fenomenul bătăilor* (fig. 14.12).

În cazul frecvențelor acustice, sunetul de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ se aude succesiv întărindu-se și slăbindu-se cu frecvența și perioada bătăilor:

$$\nu_b = |\nu_2 - \nu_1|, \ T_b = \frac{1}{\nu_b} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}. \quad (14.45)$$

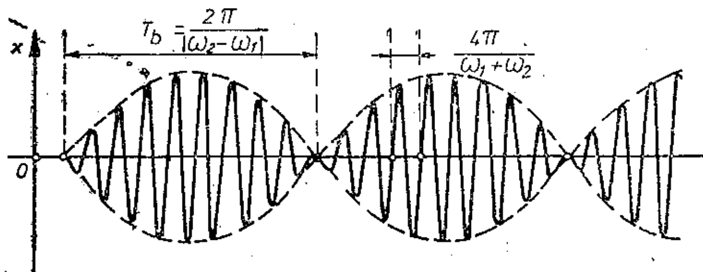


Fig. 14.12

14.3.4. OSCILAȚII MODULATE

Fenomenul bătăilor de mai sus este un caz particular al așa-numitelor „oscilații sinusoidale modulate“ (ca în radiofonie), adică oscilații de tip sinusoidal, dar cu amplitudine variabilă *lent* după o anumită lege. De exemplu (fig. 14.13):

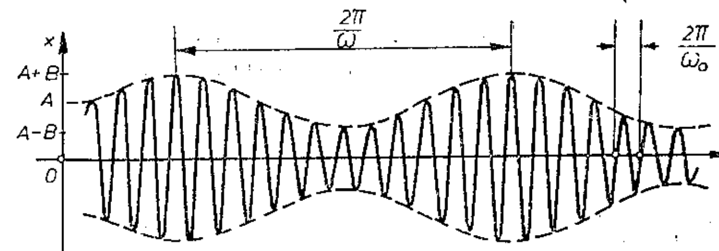


Fig. 14.13

$$x = (A + B\cos\omega t)\cos\omega_0 t, \ \omega \ll \omega_0, \ B < A, \quad (14.46)$$

se compune din trei oscilații armonice de frecvențe diferite:

$$x = A\cos\omega_0 t + \frac{B}{2}\cos(\omega_0 + \omega)t + \frac{B}{2}\cos(\omega_0 - \omega)t. \quad (14.47)$$

În radiofonie, ω este frecvența sunetului (audiofrecvența) (frecvența „anvelopei“), ω_0 — frecvența purtătoare, înaltă (radiofrecvența), $\omega_0 \pm \omega$ sînt frecvențele laterale.

Mai general, o oscilație compusă din oscilații armonice este caracterizată de *spectrul* său — o diagramă în care sînt reprezentate frecvențele oscilațiilor sinusoidale componente și amplitudinile lor, nu apar însă reprezentate în această diagramă defazajele relative. De exemplu, pentru oscilația modulată (14.46—47) spectrul este reprezentat în fig. 14.14. Dacă se transmite un sunet compus (vorbire, orchestră), atunci vom avea două *benzi* laterale.

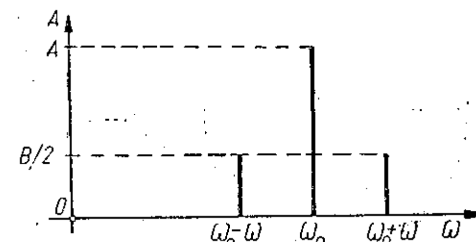


Fig. 14.14

14.4. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PERPENDICULARE

14.4.1. FRECVENȚE EGALE

Să considerăm mai întîi compunerea oscilațiilor de direcții perpendiculare și de *aceeași frecvență*:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \ y = B\cos(\omega t + \beta). \quad (14.48)$$

Aceste ecuaţii reprezintă coordonatele punctului material, deci şi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sale (t — parametru). Prin eliminarea timpului se obţine ecuaţia unei *elipse*:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos(\beta-\alpha)=\sin^2(\beta-\alpha). \tag{14.49}$$

În particular, dacă $\beta-\alpha=0$ sau π, elipsa degenerează în două drepte confundate de-a lungul cărora oscilează punctul material:

$$y=\pm\frac{B}{A}x, \text{ dacă } \beta-\alpha=0 \text{ sau } \pi. \tag{14.50}$$

Dacă diferenţa de fază $\beta-\alpha=\pi/2$ sau $3\pi/2$, elipsa va avea axele de simetrie în direcţiile oscilaţiilor componente:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1, \text{ dacă } \beta-\alpha=\frac{\pi}{2} \text{ sau } \frac{3\pi}{2}. \tag{14.51}$$

Pentru $\beta-\alpha=\pi/2$ ecuaţiile (14.48) devin

$$x=A\cos(\omega t+\alpha),\; y=B\cos(\omega t+\alpha+\pi/2)=-B\sin(\omega t+\alpha),$$

de unde se vede că elipsa (14.51) este parcursă în sens invers trigonometric. În celălalt caz ($\beta-\alpha=3\pi/2$) elipsa este parcursă în sens trigonometric. Dacă în plus $A=B$, elipsa devine cerc.

Este interesant că dacă suprapunem două mişcări *circulare*, parcurse în sensuri opuse (cu faze egale în modul), obţinem o oscilaţie armonică *liniară* de amplitudine dublă (fig. 14.15):

$$x=2A\sin(\omega t+\alpha).$$

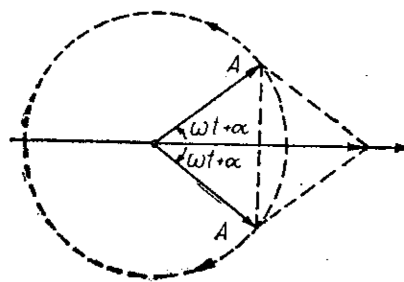


Fig. 14.15

Invers, o oscilaţie armonică liniară poate fi descompusă în două oscilaţii circulare de aceeaşi frecvenţă, de sensuri opuse, şi de amplitudini pe jumătate. Acest fapt îşi găseşte o aplicaţie în optică pentru legătura dintre lumina polarizată liniar şi lumina polarizată circular.

14.4.2. FIGURI LISSAJOUS

Dacă frecvenţele sînt *diferite*, punctul descrie o traiectorie complicată. Dacă raportul frecvenţelor este *raţional* (adică raport de numere întregi), traiectoria este stabilă (fixă), dar forma depinde şi de diferenţa de fază. Traiectoriile obţinute se numesc în acest caz *figuri Lissajous* (fig. 14.16).

Raportul dintre numărul punctelor de tangenţă a traiectoriei cu o dreaptă verticală şi una orizontală sau raportul dintre numărul punctelor de intersecţie a traiectoriei cu o dreaptă verticală şi una orizontală este egal cu raportul frecvenţelor oscilaţiilor componente.

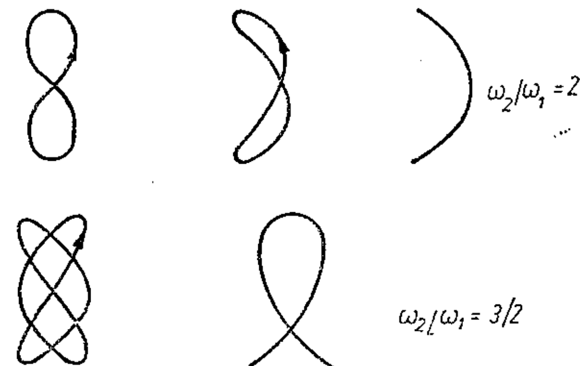


Fig. 14.16

Dacă raportul frecvenţelor nu este raţional, punctul descrie o curbă care acoperă treptat o arie.

14.5. OSCILAŢIILE AMORTIZATE

14.5.1. ECUAŢIA OSCILAŢIILOR AMORTIZATE

Datorită interacţiunii cu mediul în care efectuează oscilaţii, particula pierde continuu energie prin radiaţie sau prin frecare. Cum energia oscilatorului este proporţională cu pătratul amplitudinii, înseamnă că amplitudinea scade cu timpul, adică oscilaţiile se sting, se amortizează. Disiparea energiei oscilatorului datorită interacţiunii sale cu mediul nu este un proces pur mecanic şi poate fi explicată pe baza altor capitole ale fizicii (termodinamica, fizica statistică, electrodinamica), dar în multe cazuri efectul mediului poate fi descris fenomenologic printr-un model de forţă de rezistenţă.

De exemplu, în cazul unui mediu vîscos, în regim laminar de curgere, forţa de rezistenţă (frecare) poate fi considerată proporţională cu viteza particulei (Stokes); în regim turbulent forţa de rezistenţă este proporţională cu pătratul vitezei; pentru frînarea datorită radiaţiei electromagnetice forţa de rezistenţă (de frînare) este proporţională cu derivata acceleraţiei; în cazul frecării uscate solid-solid, forţa de frecare este constantă în modul, schimbîndu-şi doar semnul.

Vom studia mai jos numai cazul forţei de frecare proporţionale cu viteza particulei, ca, de exemplu, în cazul unui pendul gravitaţional sau elastic aflat într-un mediu *vîscos*. Forţa de rezistenţă a mediului micşorează viteza particulei, fiind orientată în sens *opus* vitezei:

$$\vec{R}=-r\vec{v},\; R=-rv=-r\dot{x},\; [r]=\text{kg/s în SI}, \tag{14.52}$$

unde r se numeşte *coeficient de rezistenţă*.

Ecuaţia oscilaţiilor amortizate este deci

$$m\ddot{x}=-kx-r\dot{x},\; m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0 \text{ sau } \ddot{x}+2b\dot{x}+\omega^2x=0, \tag{14.53}$$

unde

$$b\stackrel{\text{def}}{=}\frac{r}{2m},\quad \omega^2=\frac{k}{m},\quad [b]=\text{s}^{-1}, \tag{14.54}$$

unde ω este frecvenţa oscilaţiilor proprii în *absenţa* amortizării, iar b se numeşte *coeficient de amortizare*.

Soluțiile ecuației diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți (14.53) sînt de forma $Ce^{\rho t}$. Introducînd această soluție în ecuația (14.53), obținem *ecuația caracteristică* pentru ρ:

$$\rho^2 + 2b\rho + \omega^2 = 0, \quad \rho_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}. \tag{14.55}$$

Soluția generală este o suprapunere a celor două soluții:

$$x = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} \text{ dacă } \rho_1 \neq \rho_2. \tag{14.56}$$

Distingem trei cazuri, după cum rădăcinile ecuației caracteristice (14.55) sînt complexe conjugate, reale distincte sau confundate.

14.5.2. OSCILAȚII AMORTIZATE PSEUDOPERIODICE

Dacă $b < \omega$, adică coeficientul de amortizare este suficient de mic ($r < 2\sqrt{mk}$), rădăcinile $\rho_{1,2}$ sînt complexe. Obținem soluții reale dacă și constantele $C_{1,2}$ sînt complex conjugate între ele, anume

$$C_1 = \frac{1}{2} A_0 e^{i\alpha}, \quad C_2 = \frac{1}{2} A_0 e^{-i\alpha},$$

unde A_0, α sînt alte două constante arbitrare reale. Soluția se scrie atunci, ținînd seama de formulele lui Euler (14.24), astfel:

$$x = A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha) = A \cos(\omega' t + \alpha),$$

$$A = A_0 e^{-bt} = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t}, \tag{14.57}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - b^2} = \sqrt{k/m - r^2/4m^2} < \omega = \sqrt{k/m}; \tag{14.58}$$

$$x = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \cos(\sqrt{k/m - r^2/4m^2} \cdot t + \alpha), \tag{14.58'}$$

unde ω' este frecvența oscilațiilor libere *amortizate*, numită și *pseudofrecvență* (sau pseudopulsație). Ea este *mai mică* decît frecvența oscilațiilor proprii $\omega = \sqrt{k/m}$ în absența amortizării (frecărilor), deoarece frecările totdeauna se opun mișcării și o întîrzie, mărind perioada, deci micșorînd frecvența oscilațiilor.

Oscilațiile amortizate (14.57) sînt de tip sinusoidal, dar cu amplitudinea descrescătoare exponențial: $A = A_0 e^{-bt}$ (fig. 14.17).

Raportul elongațiilor sau al amplitudinilor la un interval de timp egal cu perioada T' este:

$$\frac{x(t)}{x(t+T')} = \frac{A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha)}{A_0 e^{-b(t+T')} \cos[\omega'(t+T') + \alpha]} = e^{bT'}.$$

Logaritmul natural al acestui raport se numește *decrement logaritmic*:

$$D = bT' = \frac{2\pi b}{\omega'} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} = \frac{\pi r}{m\sqrt{k/m - r^2/4m^2}}. \tag{14.59}$$

Spre deosebire de coeficientul de amortizare $b = r/2m$, decrementul logaritmic D este *adimensional* și caracterizează de asemenea gradul de amortizare a oscilațiilor. Cu ajutorul lui se poate compara gradul de amortizare a oscilațiilor de naturi diferite (mecanice, electrice, acustice etc.).

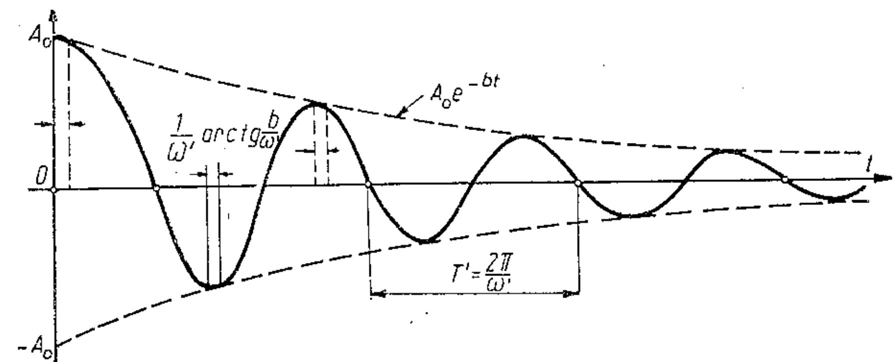


Fig. 14.17

O măsură a duratei oscilațiilor amortizate este inversul coeficientului de amortizare b, numit *timp de relaxare* (sau „timp de viață") $\tau = 1/b = 2m/r$. El ne arată în cît timp amplitudinea $A = A_0 e^{-bt}$ scade de $e = 2{,}718$ ori. Inversul decrementului logaritmic este atunci egal cu numărul oscilațiilor efectuate într-un timp egal cu timpul de relaxare:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{bT'} = \frac{\tau}{T'} = N_0, \quad \left(\tau = \frac{1}{b}\right). \tag{14.60}$$

Timpul de înjumătățire $T_{1/2}$ a amplitudinii rezultă din condiția

$$A_0 e^{-b(t+T_{1/2})} = \frac{1}{2} A_0 e^{-bt}, \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} = \ln 2 \cdot \tau = 0{,}693\ \tau. \tag{14.61}$$

Dacă amortizarea este mică, adică $b \ll \omega$ (sau $r \ll \sqrt{mk}$), atunci ($\omega' \approx \omega$):

$$D = bT' \approx 2\pi\frac{b}{\omega} = \frac{\pi r}{\sqrt{mk}} \ll 1, \ (b \ll \omega), \ N_0 = \frac{1}{D} \gg 1, \tag{14.62}$$

adică în timpul de viață se efectuează un număr mare de oscilații. Atunci amplitudinea oscilațiilor amortizate aproape că nu se schimbă în timpul unei perioade și putem calcula în acest caz *energia* oscilatorului cu formula cunoscută de la oscilatorul armonic, neglijînd variația amplitudinii, adică a factorului e^{-bt}, pe timpul *unei* perioade:

$$E = \frac{1}{2} m\omega'^2 A^2 = \frac{1}{2} m\omega'^2 A_0^2 e^{-2bt} = E_0 e^{-2bt} = E_0 e^{-\frac{r}{m}t}, \tag{14.63}$$

adică energia scade exponențial cu timpul cu coeficientul de atenuare $2b = r/m$.

14.5.3. MIȘCAREA AMORTIZATĂ APERIODICĂ

În cazul $b > \omega$ (sau $r > 2\sqrt{mk}$), adică coeficientul de amortizare este suficient de mare, rădăcinile $\rho_{1,2}$ sînt reale negative și soluția generală este

$$x = C_1\, e^{-(b + \sqrt{b^2-\omega^2})t} + C_2\, e^{-(b-\sqrt{b^2-\omega^2})\, t} =$$

$$= e^{-bt}(C_1\, e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}\cdot t} + C_2\, e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\cdot t}), \qquad (14.64)$$

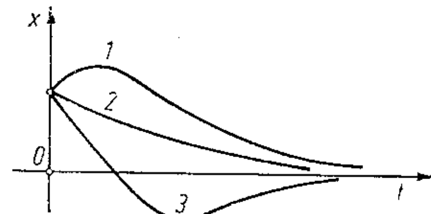


Fig. 14.18

adică elongația tinde asimptotic către zero, corpul poate trece cel mult o singură dată prin poziția de echilibru, în funcție de condițiile inițiale (fig. 14.18). Mișcarea se numește *amortizată aperiodică* (riguros vorbind, orice mișcare amortizată este aperiodică).

În cazul $b = \omega$ rădăcinile $\rho_{1,2}$ coincid și soluția generală este

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-bt}. \qquad (14.65)$$

Acesta este un caz particular al amortizării aperiodice, numit *mișcare aperiodică critică* (seamănă cu fig. 14.18).

14.5.4. DISIPAREA ENERGIEI

Energia oscilatorului scade în timp. Să calculăm scăderea energiei în unitatea de timp, adică *puterea disipată*.

Deoarece *variația energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forțelor neconservative*, avem

$$dE = -\, r\dot{x}\, d\, x, \quad \frac{d\,E}{d\,t} = \dot{E} = -r\dot{x}^2 = -rv^2 = -\,2bmv^2. \qquad (14.66)$$

Expresia pătratică în viteză

$$Q \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\, r\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\, rv^2 = bmv^2 \qquad (14.67)$$

se numește *funcție de disipație*. Ea are două proprietăți : derivata sa în raport cu viteza este egală cu forța disipativă cu semn schimbat :

$$F_r = -\,\frac{d\,Q}{d\,\dot{x}} = -\,r\dot{x} = -\,rv \qquad (14.68)$$

și puterea disipată este egală cu dublul funcției de disipație :

$$-\dot{E} = 2Q = r\dot{x}^2 = rv^2. \qquad (14.69)$$

14.6. OSCILAȚIILE FORȚATE

14.6.1. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ

Datorită forței de frecare $-r\dot{x}$, care „consumă“ din energia oscilatorului, oscilațiile sînt amortizate. Pentru a întreține oscilațiile trebuie să intervenim cu o forță din afară asupra sistemului oscilant pentru a compensa „pierderile“ de energie datorită frecărilor.

Să presupunem că asupra particulei acționează o forță *periodică* (cazul cel mai interesant practic) :

$$F = F_0 \cos \Omega t. \qquad (14.70)$$

Experiența arată că după trecerea unui regim *tranzitoriu*, se stabilește regimul *permanent* în care particula efectuează *oscilații întreținute de amplitudine constantă și cu frecvența forței periodice exterioare, numite oscilații forțate.*

Ecuația diferențială este

$$m\ddot{x} = -\,kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t,$$

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos \Omega t. \qquad (14.71)$$

În matematică se demonstrează că soluția generală a ecuației cu partea dreaptă (14.71) se compune din soluția *generală* a ecuației omogene corespunzătoare (fără partea dreaptă), plus o soluție *particulară* a ecuației complete.

Soluția generală a ecuației omogene, fără membru drept, reprezintă oscilațiile libere (proprii) care au fost studiate în paragraful precedent. Soluția particulară a ecuației complete (14.71) reprezintă tocmai oscilațiile forțate care rămîn în regimul permanent, după stingerea oscilațiilor proprii (datorită factorului exponențial descrescător e^{-bt}).

14.6.2. SOLUȚIA PARTICULARĂ

Soluți particulară a ecuației (14.71) se obține ușor cunoscînd metoda de compunere a oscilațiilor sinusoidale (14.37).

Deoarece membrul drept este periodic cu frecvența Ω, trebuie ca și membrul stîng să fie periodic cu aceeași frecvență, de aceea căutăm soluția particulară de forma $x = B \cos(\Omega t + \beta)$, de unde

$$\dot{x} = \Omega\, B \cos\,(\Omega t + \beta + \pi/2), \quad \ddot{x} = -\,\Omega^2\, B \cos\,(\Omega t + \beta).$$

Introducînd în ecuația (14.71), avem :

$$-\,\Omega^2 B \cos\,(\Omega t + \beta) + 2b\Omega B \cos\,(\Omega t + \beta + \pi/2) + \omega^2 B \cos\,(\Omega t + \beta) =$$

$$= \frac{1}{m}\, F_0 \cos\, \Omega t,$$

$$B(\omega^2 - \Omega^2) \cos\,(\Omega t + \beta) + 2B\Omega b \cos\,(\Omega t + \beta + \pi/2) = \frac{1}{m} F_0 \cos\, \Omega t.$$

În membrul stîng aplicăm formula de compunere a oscilațiilor sinusoidale (14.37) și obținem:

$$B\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}\cdot \cos\,(\Omega t + \alpha) = \frac{1}{m}\, F_0 \cos\, \Omega t,$$

unde faza rezultantă α trebuie să fie nulă ca în membrul drept :

$$0 = \sin\alpha = \frac{B(\omega^2 - \Omega^2)\sin\beta + 2B\Omega b\sin(\beta + \pi/2)}{B\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}},$$

$$1 = \cos\alpha = \frac{B(\omega^2 - \Omega^2)\cos\beta + 2B\Omega b\cos(\beta + \pi/2)}{B\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}},$$

de unde rezultă

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}, \quad (14.72)$$

$$\sin\beta = \frac{-2\Omega b}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{-r}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} < 0,$$

$$\text{deci } \beta \in (0, -\pi), \quad (14.73)$$

$$\cos\beta = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{k/\Omega - m\Omega}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}},$$

$$\text{pentru } \Omega < \omega,\ \cos\beta > 0,\ \text{deci } \beta \in \left(0, -\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{pentru } \Omega > \omega,\ \cos\beta < 0,\ \text{deci } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\pi\right);$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{2\Omega b}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}. \quad (14.74)$$

14.6.3. TRATAREA COMPLEXĂ

Soluția particulară a ecuației (14.71) se obține ușor sub forma complexă, prin metoda reprezentării complexe a oscilațiilor sinusoidale (fig. 14.19, $\beta < 0$ după cum am văzut) :

$$\bar{x} = \bar{B}\,e^{i\Omega t} = B\,e^{i(\Omega t + \beta)},\ \dot{\bar{x}} = i\,\Omega\,\bar{x},\ \ddot{\bar{x}} = -\Omega^2\bar{x}.$$

Introducînd în ecuația diferențială (14.71), obținem :

$$(-\Omega^2 + 2\,i\,\Omega b + \omega^2)\bar{x} = \frac{1}{m}F_0\,e^{i\Omega t} \text{ sau } (\omega^2 - \Omega^2 + 2\,i\,\Omega b)\bar{B} = \frac{1}{m}F_0 \quad (14.75)$$

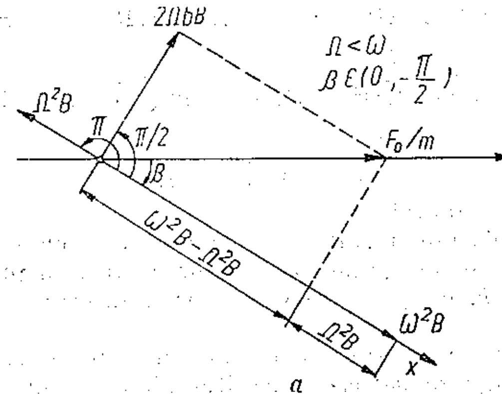
(am omis, ca de obicei, factorul temporal $e^{i\Omega t}$), de unde

$$\bar{x} = \frac{F_0\,e^{i\Omega t}}{m(\omega^2 - \Omega^2 + 2i\,\Omega b)} = \bar{B}\,e^{i\Omega t} = B\,e^{i(\Omega t + \beta)} \quad (14.76)$$

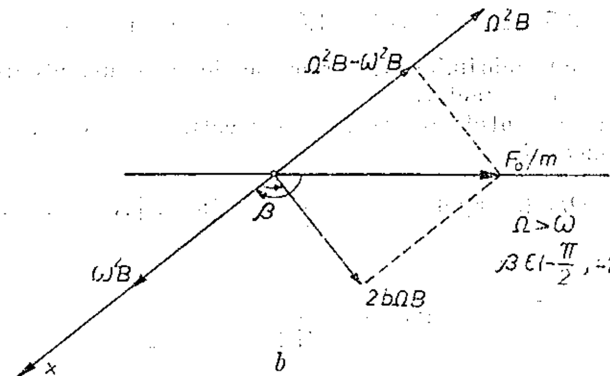
cu amplitudinea $B = |\bar{x}|$ și faza inițială $\beta = \arg\bar{B}$:

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}, \quad (14.72)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-2\Omega b}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}. \quad (14.74)$$



a



b

Fig. 14.19

Din (14.76) rezultă soluția reală :

$$x = \operatorname{Re}\{B\,e^{i(\Omega t + \beta)}\} = B\cos(\Omega t + \beta) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}}\cos(\Omega t + \beta), \quad (14.77)$$

$$x = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}\cos\left(\Omega t + \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right).$$

Soluția generală completă va fi dată de suprapunerea oscilațiilor proprii cu oscilațiile forțate :

$$x = A_0\,e^{-lt}\cos(\omega' t + \alpha) + B\cos(\Omega t + \beta). \quad (14.78)$$

14.6.4. OSCILAŢII FORŢATE

Regimul tranzitoriu se termină după un timp suficient de lung (ca ordin de mărime după timpul de relaxare $\tau = 1/b$), cînd primul termen care dă oscilaţiile proprii devine neglijabil.

După stingerea oscilaţiilor proprii amortizate rămîne regimul permanent. Ne vom ocupa mai jos de *oscilaţiile forţate*.

Viteza particulei este

$$v = \dot{x} = -\Omega B \sin(\Omega t + \beta) = \Omega B \cos(\Omega t + \beta + \pi/2), \qquad (14.79)$$

$$v_0 = \Omega B = \frac{\Omega F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2/\Omega - \Omega)^2 + 4b^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}. \qquad (14.80)$$

Trebuie subliniat faptul că:

— frecvenţa oscilaţiilor forţate este egală cu frecvenţa forţei exterioare;

— amplitudinea şi defazajul oscilaţiilor forţate depind de structura sistemului oscilant (k, m) şi de frecvenţa forţei exterioare, şi *nu* depind de condiţiile iniţiale;

— oscilaţiile forţate *nu* sînt amortizate, deşi în sistem există forţe de frecare (care influenţează *valoarea* amplitudinii oscilaţiilor forţate).

14.6.5. ANALOGIA MECANO-ELECTRICĂ

Prin analogie cu mărimile electrice, se definesc următoarele mărimi:

Rezistenţa mecanică (activă):

r — coeficientul de rezistenţă (real), $[r]$ = kg/s.

Reactanţele mecanice:

$$X_m = \Omega m \text{ (inerţială)}, \quad X_k = \frac{k}{\Omega} \text{ (elastică)}, \quad [X] = \text{kg/s},$$

sau sub formă complexă:

$$\bar{X}_m = \mathrm{i}\,\Omega m, \quad \bar{X}_k = \frac{k}{\mathrm{i}\,\Omega} = -\mathrm{i}\frac{k}{\Omega}, \qquad (14.81)$$

în care m este analogul mecanic al inductanţei L şi $1/k$ este analogul mecanic al capacităţii C.

Reactanţa mecanică totală:

$$X = \Omega m - \frac{k}{\Omega}, \quad \bar{X} = \mathrm{i}\left(\Omega m - \frac{k}{\Omega}\right), \quad X = |\bar{X}|. \qquad (14.82)$$

Impedanţa mecanică a oscilatorului amortizat este analogul impedanţei unui circuit oscilant serie:

$$Z = \sqrt{r^2 + X^2} = \sqrt{r^2 + (X_m - X_k)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\Omega m - \frac{k}{\Omega}\right)^2},$$

$$\bar{Z} = r + \bar{X} = r + \mathrm{i}\left(\Omega m - \frac{k}{\Omega}\right) = \frac{m}{\Omega}[2\Omega b + \mathrm{i}(\Omega^2 - \omega^2)], \qquad (14.83)$$

$$Z = |\bar{Z}| = \frac{m}{\Omega}\sqrt{4\Omega^2 b^2 + (\Omega^2 - \omega^2)^2}; \quad [Z] = \text{kg/s}.$$

Cu noile notaţii putem scrie:

$$B = \frac{F_0}{\Omega Z}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{r}{X} = \frac{r}{X_m - X_k}, \quad v_0 = \frac{F_0}{Z}. \qquad (14.84)$$

Viteza este analogul intensităţii curentului electric, elongaţia x analogul sarcinii electrice (proporţională cu tensiunea la bornele condensatorului), iar forţa este analogul tensiunii electrice.

Analogia mecano-electrică

Mărimi mecanice	Mărimi electrice
forţa F, [N]	tensiunea U, [V]
viteza v, [m/s]	intensitatea curentului i, [A]
elongaţia x, [m]	sarcina electrică q, [C]
rezistenţa r, [kg/s]	rezistenţa R, [Ω]
masa m, [kg]	inductanţa L, [H]
constanta elastică k, [N/m]	inversul capacităţii $1/C$, [1/F]
reactanţa inerţială Ωm, [kg/s]	reactanţa inductivă ωL, [Ω]
reactanţa elastică k/Ω, [kg/s]	reactanţa capacitivă $1/\omega C$, [Ω]
impedanţa $\bar{Z} = r + \mathrm{i}(\Omega m - k/\Omega)$, [kg/s]	impedanţa $\bar{Z} = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, [Ω]
$Z = \lvert\bar{Z}\rvert = \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}$, [kg/s]	$Z = \lvert\bar{Z}\rvert = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, [Ω]
$B = \frac{F_0}{\Omega Z}$, [m]	$q_m = \frac{U_m}{\omega Z}$, [C]
$v_0 = \frac{F_0}{Z}$, [m/s]	$I_m = \frac{U_m}{Z}$, [A]
defazajul β dintre x şi F	defazajul $-\varphi - \frac{\pi}{2}$ dintre q şi U
defazajul $\beta + \frac{\pi}{2}$ dintre v şi F	defazajul $-\varphi$ dintre I şi U
$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}$	$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$
$P = \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega B \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$, [W]	$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = UI\cos\varphi$, [W]

14.7. REZONANŢA

14.7.1. REZONANŢA ELONGAŢIILOR

Atunci cînd frecvenţa forţei exterioare Ω variază, amplitudinea B a oscilaţiilor forţate variază (fig. 14.20). Maximul amplitudinii B are loc pentru frecvenţa care face minimă cantitatea de sub radical (anulăm derivata în raport cu Ω^2):

$$-2(\omega^2 - \Omega^2) + 4b^2 = 0 \to \Omega = \omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} =$$

$$= \sqrt{k/m - r^2/2m^2} < \omega', \text{ dacă } b < \omega/\sqrt{2} \text{ sau } r < \sqrt{2mk}. \qquad (14.85)$$

Pentru această frecvență are loc *rezonanța elongațiilor* (fig. 14.20):

$$B_{max} = \frac{F_0}{2m\omega' b} = \frac{F_0}{r\omega'} = \frac{F_0}{r\sqrt{\omega^2 - b^2}}. \quad (14.86)$$

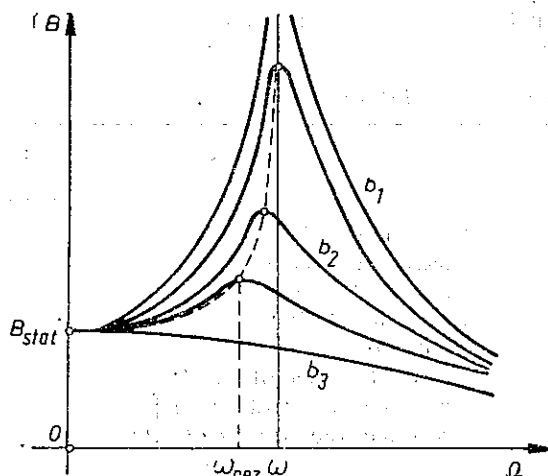


Fig. 14.20

Curbele din fig. 14.20 se numesc *curbe de rezonanță*; cu cît maximul este mai înalt și curba mai îngustă, cu atît rezonanța este mai „ascuțită". Este interesant de comparat această amplitudine de rezonanță cu elongația *statică* produsă de forța F_0:

$$B_{stat} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad (14.87)$$

ceea ce rezultă și din (14.72) pentru $\Omega = 0$;

$$\frac{B_{max}}{B_{stat}} = \frac{\omega}{2b\sqrt{1-(b/\omega)^2}}. \quad (14.88)$$

Pentru amortizări mici, $b \ll \omega$, rezultă o creștere mare a amplitudinii:

$$b/\omega \ll 1, \quad \frac{B_{max}}{B_{stat}} \approx \frac{\omega}{2b} = \frac{\sqrt{mk}}{r} \gg 1, \quad (14.89)$$

uneori sistemul se poate chiar distruge la rezonanță.

Raportul $\frac{\sqrt{mk}}{r}$ este analogul *factorului de calitate* $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ de la circuitele oscilante.

Ecuația curbei pe care se situează amplitudinile maxime se obține eliminînd coeficientul de amortizare b din (14.85—86):

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega^4 - \Omega^4}} = \frac{F_0}{\sqrt{k^2 - m^2\Omega^4}}. \quad (14.90)$$

14.7.2. REZONANȚA VITEZELOR

După cum se vede din (14.80), maximul amplitudinii *vitezei*, adică *rezonanța vitezelor*, are loc pentru frecvența:

$$\Omega = \omega = \sqrt{k/m} \text{ cînd } X = \Omega m - k/\Omega = 0,$$

$$v_{0max} = (\Omega B)_{max} = \frac{F_0}{2mb} = \frac{F_0}{r}. \quad (14.91)$$

În acest caz amplitudinea B nu este însă maximă:

$$B_0 = \frac{F_0}{2m\omega b} = \frac{F_0}{r\omega} < B_{max} = \frac{F_0}{r\omega'}, \ (\omega' < \omega). \quad (14.92)$$

$$\frac{B_0}{B_{stat}} = \frac{\omega}{2b} = \frac{1}{r}\sqrt{mk};$$

ultimul raport se numește „factor de calitate" al sistemului oscilant (analog factorului de calitate $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ de la circuitele oscilante).

Prin urmare, trebuie să distingem *rezonanța elongațiilor*, cînd *amplitudinea* este maximă la frecvența

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} < \omega' = \sqrt{\omega^2 - b^2} < \omega, \quad (14.93)$$

mai mică decît frecvența oscilațiilor libere, și *rezonanța vitezelor* cînd amplitudinea *vitezei* este maximă la frecvența $\Omega = \omega$, egală cu frecvența oscilațiilor proprii în absența amortizării.

Dacă coeficientul de amortizare b este foarte mic, $b \ll \omega$, atunci cele două rezonanțe practic coincid și au loc pentru frecvența $\Omega \cong \omega$, maximul amplitudinii la rezonanță va fi foarte mare și curba de rezonanță va fi foarte ascuțită (pentru $b \to 0$, $B_{max} \to \infty$). Pentru amortizări mari, $b > \omega/\sqrt{2}$ sau $r > \sqrt{2mk}$, nu există o rezonanță a elongațiilor, curba amplitudinii B scade monoton cu frecvența Ω, dar există o rezonanță a vitezelor.

14.7.3. DEFAZAJUL

Din (14.73) se vede că *oscilațiile forțate* totdeauna întîrzie față de forța exterioară ($\beta < 0$).

Cînd $\Omega < \omega$, defazajul β dintre elongație și forță este în cadranul IV (fig. 14.21—22). Cînd trecem prin *rezonanța vitezelor* $\Omega = \omega$, $\beta = -\pi/2$: elongația este în cuadratură cu forța, în timp ce *viteza va fi în fază cu forța exterioară*, conform lui (14.79).

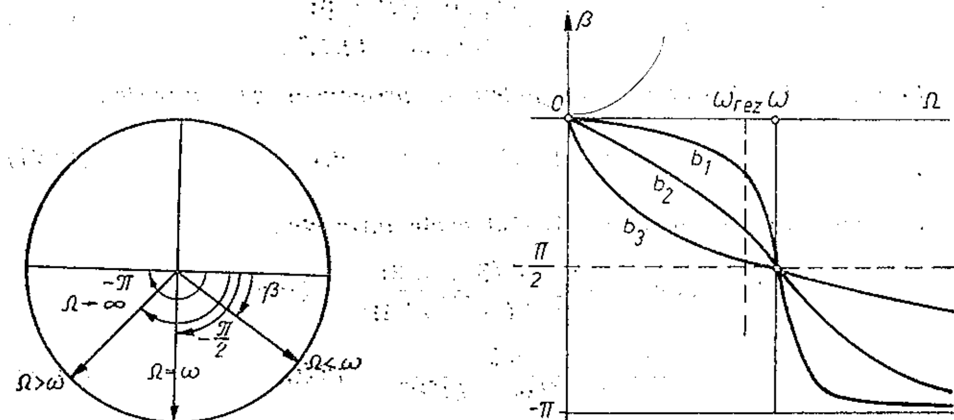


Fig. 14.21 Fig. 14.22

Cînd $\Omega > \omega$, $\beta < -\pi/2$ și trece din cadranul IV în cadranul III, iar cînd $\Omega \to \infty$, $\beta \to -\pi$, adică *la frecvențe foarte înalte elongația este în opoziție de fază cu forța.*

La rezonanța vitezelor ($\Omega = \omega$) *forța activă* $F_0 \cos \Omega t$ *devine exact egală în modul și de sens opus cu forța disipativă* (de frecare) $-r\dot{x} = -rv$, care, în adevăr, la rezonanța vitezelor devine, conform lui (14.79, 92) :

$$-rv = -r\omega B_0 \cos \omega t = -F_0 \cos \omega t, \ (\Omega = \omega).$$

14.7.4. DISIPAREA ENERGIEI

În regim permanent (staționar), cînd sistemul efectuează oscilații forțate (14.77), energia sa *medie* rămîne constantă, fiindcă energia absorbită continuu de sistem pe seama sursei forței externe, $\int Fv \, dt$, este continuu *disipată* prin intermediul frecărilor, $\int F_r v \, dt$.

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\Omega^2 B^2 \sin^2 (\Omega t + \beta) +$$

$$+ \frac{1}{2} kB^2 \cos^2 (\Omega t + \beta),$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} mB^2 \frac{\Omega^2 + \omega^2}{2} = \text{const.} \qquad (14.94)$$

Puterea dezvoltată de forța exterioară este (analogul lui ui) :

$$Fv = F_0 \cos \Omega t \cdot \Omega B \cos (\Omega t + \beta + \pi/2) =$$

$$= \frac{F_0^2 \cos \Omega t \cdot \cos (\Omega t + \beta + \pi/2)}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}. \qquad (14.95)$$

La rezonanța vitezelor ($\beta = -\pi/2$) *viteza este în fază cu forța exterioară și puterea va fi tot timpul pozitivă.*

Puterea disipată de forța de frecare este (analogul lui Ri^2) :

$$F_r v = rv^2 = \frac{rF_0^2 \sin^2 (\Omega t + \beta)}{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}. \qquad (14.96)$$

La rezonanța vitezelor cele două puteri sînt permanent egale între ele :

$$\frac{F_0^2}{r} \cos^2 \omega t, \ (\Omega = \omega, \ F = F_r). \qquad (14.97)$$

Puterile *medii* (pe o perioadă) sînt egale între ele :

$$P = \langle Fv \rangle = \frac{F_0^2 \cos (\beta + \pi/2)}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} = \langle F_r v \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{rF_0^2}{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2} = P(\Omega), \qquad (14.98)$$

unde am folosit (14.73) pentru $\cos (\beta + \pi/2) = -\sin \beta$.

La rezonanța vitezelor puterea absorbită și disipată este maximă :

$$P_{max} = \frac{F_0^2}{2r}, \quad \langle E \rangle_{max} = \frac{mF_0^2}{2r^2}. \qquad (14.99)$$

Se pare că „adevărata" rezonanță, fizică, este cea a vitezelor.

14.7.5. VECINĂTATEA REZONANȚEI ASCUȚITE

În apropierea rezonanței, cînd $|\Omega - \omega| \ll \omega$, și pentru amortizări mici $b \ll \omega$ (deci $B_{max} \cong F_0/r\omega$), cînd curba de rezonanță este foarte ascuțită, putem face următoarele aproximații. Scriind amplitudinea oscilațiilor sub forma :

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega - \Omega)^2(2\omega + \Omega - \omega)^2 + 4b^2(\omega + \Omega - \omega)^2}},$$

se vede că sub radical avem deja mărimile mici $\Omega - \omega$ și b la pătrat, de aceea putem neglija $\Omega - \omega$ față de ω, adică $\omega + \Omega = 2\omega + (\Omega - \omega) \approx 2\omega$ și $4\Omega^2 b^2 \approx 4\omega^2 b^2$; păstrînd deci mărimile mici pînă la ordinul doi inclusiv, adică păstrînd prima aproximație nenulă :

$$B \cong \frac{F_0}{2m\omega\sqrt{(\omega - \Omega)^2 + b^2}} \cong \frac{B_{max}}{\sqrt{1 + (\omega - \Omega)^2/b^2}}. \qquad (14.100)$$

În imediata vecinătate a rezonanței, anume pentru $|\Omega - \omega| \ll b$, (14.100) dă $B \approx B_{max}$. Amplitudinea începe să scadă sensibil cînd $|\omega - \Omega| \sim b$ și anume, *pentru* $|\omega - \Omega| = b$ *sau* $\Omega = \omega \pm b$, *amplitudinea devine* $B_{max}/\sqrt{2} = 0{,}707$ B_{max}. Prin urmare, *coeficientul de amortizare* $b = r/2m$ *caracterizează semilărgimea curbei de rezonanță* (fig. 14.23).

Prin *lărgimea* curbei de rezonanță se înțelege *intervalul* de frecvențe $\Omega_2 - \Omega_1$, unde $\Omega_{1,2}$ sînt *frecvențele unghiulare* pentru care ordonata curbei de rezonanță se reduce la $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ din maximul curbei.

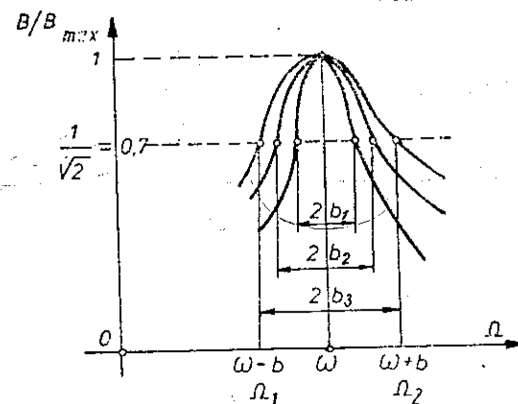


Fig. 14.23

În cazul nostru (fig. 14.23) :

$$2b = \Omega_2 - \Omega_1, \ b = \frac{r}{2m} = \frac{1}{2} \Delta\Omega = \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1). \qquad (14.101)$$

În cazul reprezentării unei mărimi *energetice*, care este *pătratică* în amplitudine, lărgimea curbei trebuie luată la 1/2 din maximul curbei (pentru a obține coeficientul de amortizare).

Prin urmare, din graficul curbei de rezonanță $B = B(\Omega)$ (dacă această curbă este „ascuțită", $b \ll \omega$, și nu „aplatisată"), luînd semilărgimea curbei, obținem coeficientul de amortizare $b = r/2m$.

Dacă amortizarea este mică ($b \ll \omega$), deci rezonanța este ascuțită, atunci înainte de rezonanță ($\Omega < \omega$) defazajul β este aproape zero, iar după rezonanță ($\Omega > \omega$) defazajul β este aproape $-\pi$. În cazul ideal ($b \to 0$) defazajul β ar fi nul înainte de rezonanță (oscilațiile forțate în fază cu forța) și egal cu $-\pi$ după rezonanță (oscilațiile în opoziție de fază cu forța); pentru $\Omega = \omega$ defazajul ar avea un salt de la 0 la $-\pi$; frecările însă „lărgesc" acest salt.

Dacă amortizarea este mică, făcînd aceleași aproximații ca pentru amplitudinea B ($\omega + \Omega \approx 2\omega$), avem:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-2\Omega b}{\omega^2 - \Omega^2} \approx \frac{b}{\Omega - \omega}. \tag{14.102}$$

Pentru $\Omega = \omega \mp b$, $\operatorname{tg} \beta = \mp 1$ sau $\beta = -\pi/4, -3\pi/4$, prin urmare pe intervalul îngust de frecvențe $(\omega - b, \omega + b)$ defazajul β variază cu $\pi/2$ trecînd de la $-\pi/4$ la $-3\pi/4$ (fig. 14.24). Ducînd dreptele orizontale cu faza $-\pi/4$, $-3\pi/4$ și intersectîndu-le cu curba defazajului, obținem *lărgimea* $2b = r/m$, analog lărgimii curbei de rezonanță; pe intervalul îngust $2b$ defazajul β suferă o variație $\pi/2$ egală cu *jumătate* din toată variația sa.

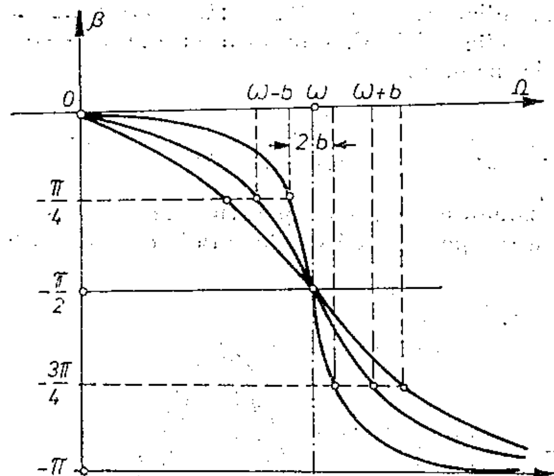


Fig. 14.24

În vecinătatea rezonanței (în cazul amortizărilor mici), să facem în (14.98) aceeași aproximație ca în (14.100):

$$P(\Omega) \approx \frac{F_0^2}{4m} \frac{b}{(\Omega - \omega)^2 + b^2} = \frac{F_0^2}{2r} \frac{1}{1 + (\Omega - \omega)^2/b^2}. \tag{14.103}$$

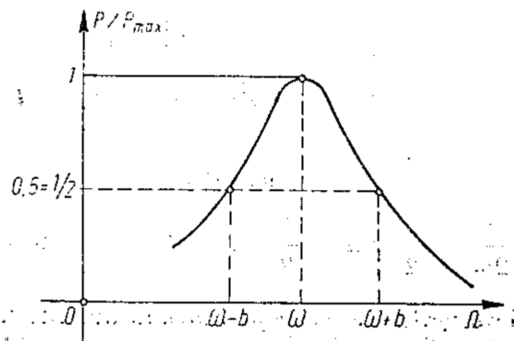


Fig. 14.25

Ultima formulă ne dă puterea absorbită de către sistemul oscilant (egală cu cea disipată) în vecinătatea rezonanței, în cazul rezonanței ascuțite. Curba este simetrică față de frecvența de rezonanță $\Omega \approx \omega$ (fig. 14.25). Forma (14.103) a relației dintre puterea absorbită și frecvență se numește *dispersivă*.

La rezonanță, pentru $\Omega = \omega$, puterea absorbită este maximă:

$$P_{\max} = P(\omega) = \frac{F_0^2}{2r}, \tag{14.104}$$

ceea ce coincide, bineînțeles, cu (14.99).

Pentru $|\Omega - \omega| = b$, adică $\Omega = \omega \pm b$, puterea absorbită sau disipată se reduce la jumătate, prin urmare $2b$ dă lărgimea curbei sau altfel, semilărgimea curbei puterii este egală cu coeficientul de amortizare b. Cu cît amortizarea este mai mică, cu atît maximul (14.103) este mai înalt și curba mai îngustă, adică rezonanța este mai „ascuțită", dar aria mărginită de curbă este aceeași.

În adevăr, această arie este dată de integrala $\int_0^\infty P(\Omega)\, d\Omega$. Deoarece $P(\Omega)$ descrește repede o dată cu „dezacordul" $(\Omega - \omega)$, putem face aproximațiile:

$$\int_0^\infty P(\Omega)\, d\Omega \approx \int_0^\infty \frac{F_0^2}{2r} \frac{d\Omega}{1 + (\Omega - \omega)^2/b^2} = \frac{F_0^2}{4m} \int_{-\omega/b}^\infty \frac{dz}{1+z^2} \approx \frac{\pi F_0^2}{4m}, \tag{14.105}$$

unde limita inferioară $-\omega/b \ll -1$ și de aceea putem lua aproximativ $\operatorname{arc\,tg} z \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$.

14.8. OSCILAȚIILE SISTEMELOR CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

Numărul *gradelor de libertate* ale unui sistem este numărul coordonatelor (parametrilor) independente necesare pentru descrierea mișcării sistemului.

Fie s numărul gradelor de libertate, x_i — coordonatele, măsurate de la valorile lor de *echilibru* ($i = 1, 2, \ldots, s$). Energia potențială, măsurată de la valoarea sa minimă de echilibru, analog cazului unidimensional, este o funcție *pătratică* în coordonatele x_i:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j, \quad (k_{ij} = k_{ji}), \tag{14.106}$$

iar energia cinetică — o funcție *pătratică pozitiv definită* în vitezele $\dot{x}_i$:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \geqslant 0, \quad (m_{ij} = m_{ji}). \tag{14.107}$$

Există un sistem de coordonate, numite *normale* (sau principale), în care ambele forme pătratice (14.106—107) se aduc *simultan* la forme *diagonale*:

$$q_i = \sum_k c_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_i k_i q_i^2, \tag{14.108}$$

astfel încît energia totală se scrie ca o sumă a energiilor de tip (14.9) ale unor oscilatori liniari, *independenți*, care efectuează oscilații simple, armonice, numite *oscilații normale*, cu frecvențele *proprii* ω_i:

$$E=\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{q}_i^2+\omega_i^2 q_i^2)\ ;\ \ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,s. \qquad (14.109)$$

Oscilația generală a sistemului va fi o anumită suprapunere a oscilațiilor normale.

Folosirea coordonatelor normale reduce astfel problema oscilațiilor unui sistem cu s grade de libertate, la problema oscilațiilor a s oscilatori liniari independenți.

Exemplu. Vom considera un sistem cu două grade de libertate și anume două pendule fizice, identice, cuplate printr-un resort fin orizontal de constantă elastică k, fixat cu distanța h mai jos de punctele de suspensie ale pendulelor, ca în fig. 14.26. Coordonatele sistemului sînt cele două unghiuri de deviere θ_1, θ_2 măsurate de la pozițiile verticale, respective, de echilibru.

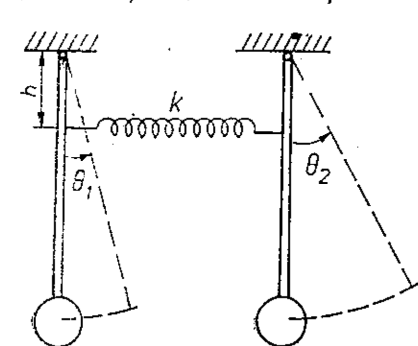


Fig. 14.26

Vom considera oscilații *mici*. Atunci alungirea resortului de cuplaj va fi $\approx h(\theta_2-\theta_1)$, forța $kh(\theta_2-\theta_1)$ și momentul ei față de axa de rotație $\pm kh^2(\theta_2-\theta_1)$.

Ecuațiile mișcării de rotație (oscilație) a pendulelor se scriu (R_0 — distanța de la axa de suspensie la CM):

$$I\ddot{\theta}_1=-mgR_0\theta_1+kh^2(\theta_2-\theta_1), \qquad (14.110)$$
$$I\ddot{\theta}_2=-mgR_0\theta_2-kh^2(\theta_2-\theta_1).$$

Introducînd notațiile:

$$\omega_0^2=\frac{mgR_0}{I},\quad \omega_c^2=\frac{kh^2}{I}, \qquad (14.111)$$

ecuațiile devin:

$$\ddot{\theta}_1+\omega_0^2\theta_1+\omega_c^2(\theta_1-\theta_2)=0,\quad \ddot{\theta}_2+\omega_0^2\theta_2+\omega_c^2(\theta_2-\theta_1)=0. \qquad (14.112)$$

Frecvențele proprii pot fi găsite pe două căi. Întîi direct, căutînd soluții simple armonice ale sistemului (14.112), anume de forma:

$$\theta_{1,2}=A_{1,2}\,e^{i\omega t}, \qquad (14.113)$$

care introduse în (14.112) dau, după simplificare cu factorul temporal $e^{i\omega t}$:

$$-\omega^2A_1+\omega_0^2A_1+\omega_c^2(A_1-A_2)=0,$$
$$-\omega^2A_2+\omega_0^2A_2+\omega_c^2(A_2-A_1)=0. \qquad (14.114)$$

Acesta este un sistem algebric *omogen* în amplitudinile $A_{1,2}$ și pentru a avea soluții neidentic nule (nebanale) determinantul sistemului trebuie să fie nul:

$$\begin{vmatrix}-\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2 & -\omega_c^2\\ -\omega_c^2 & -\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2\end{vmatrix}=0. \qquad (14.115)$$

Aceasta este o ecuație pătratică în ω^2 (numită *ecuație caracteristică*) cu rădăcinile:

$$\omega_1=\omega_0,\quad \omega_2=\sqrt{\omega_0^2+2\omega_c^2}, \qquad (14.116)$$

care constituie frecvențele oscilațiilor proprii.

Cea de-a doua cale este trecerea la coordonatele normale, adică separarea oscilațiilor independente. În cazul sistemului nostru (14.112) aceasta se face imediat prin adunarea și scăderea celor două ecuații:

$$(\theta_1+\theta_2)^{\cdot\cdot}+\omega_0^2(\theta_1+\theta_2)=0\ \text{deci}\ \omega_1=\omega_0, \qquad (14.117)$$
$$(\theta_1-\theta_2)^{\cdot\cdot}+(\omega_0^2+2\omega_c^2)(\theta_1-\theta_2)=0\ \text{deci}\ \omega_2=\sqrt{\omega_0^2+2\omega_c^2},$$

coordonatele normale fiind $q_{1,2}=\theta_1\pm\theta_2$.

Cele două oscilații normale se realizează deviind inițial pendulele cu același unghi, în același sens ($\omega_1=\omega_0$ — oscilația simetrică), respectiv în sensuri opuse (ω_2 — oscilația antisimetrică). În primul caz resortul de cuplaj rămîne de fapt tot timpul nedeformat (și poate fi scos), iar în al doilea caz el este solicitat la maximum.

Oscilația generală va fi o suprapunere a celor două oscilații normale:

$$q_1=A_1\cos(\omega_1t+\alpha_1),\ q_2=A_2\cos(\omega_2t+\alpha_2),$$
$$\theta_1=\frac{1}{2}(q_1+q_2),\quad \theta_2=\frac{1}{2}(q_1-q_2), \qquad (14.118)$$

unde constantele $A_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$ se determină din condițiile inițiale. De exemplu, ținînd în momentul inițial $t=0$ primul pendul fix $\theta_1=\dot{\theta}_1=0$, iar al doilea deviat cu unghiul Θ, adică $\theta_2=\Theta$, $\dot{\theta}_2=0$, găsim soluția:

$$\theta_1=\frac{1}{2}\Theta(\cos\omega_1t-\cos\omega_2t)=$$
$$=\Theta\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t\cdot\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t, \qquad (14.119)$$
$$\theta_2=\frac{1}{2}\Theta(\cos\omega_1t+\cos\omega_2t)=\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t\cdot\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t.$$

De aici se vede că dacă frecvențele proprii $\omega_{1,2}$ sînt apropiate între ele (cuplaj slab):

$$\omega_c\ll\omega_0\ \text{sau}\ kh^2\ll mgR_0,\ \text{atunci}\ \omega_2\cong\omega_0+\frac{\omega_c^2}{\omega_0}, \qquad (14.120)$$

obținem *fenomenul bătăilor*, adică oscilații de tip sinusoidal de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$, modulate, adică cu amplitudine *lent* variabilă cu frecvența (bătăilor):

$$\omega_b=\omega_2-\omega_1\cong\frac{\omega_c^2}{\omega_0}. \qquad (14.121)$$

Pe măsură ce amplitudinea oscilațiilor pendulului 2 scade spre zero, amplitudinea oscilațiilor pendulului 1 crește spre un maximum, apoi procesul se desfășoară în sens invers. Energia cinetică trece succesiv de la un pendul la celălalt, ele fiind în rezonanță (pendulele pot fi puse în oscilație și în plane perpendiculare pe planul figurii 14.26).

14.9. ANALIZA ARMONICĂ (FOURIER)

14.9.1. OSCILAȚII PERIODICE

Funcțiile periodice, în condiții foarte generale (condițiile lui Dirichlet), pot fi descompuse într-o serie trigonometrică de forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos (n\omega t + \alpha_n), \qquad (14.122)$$

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \quad \mathrm{tg}\, \alpha_n = -\frac{b_n}{a_n}, \qquad (14.123)$$

unde coeficienții a_n, b_n se obțin ușor înmulțind această dezvoltare cu $\cos k\omega t$, respectiv $\sin k\omega t$ și integrînd pe o perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

În adevăr, ținînd seama că

$$\int_0^T \cos n\omega t \cdot \sin k\omega t \cdot \mathrm{d}\, t = 0; \quad \int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos k\omega t \cdot \mathrm{d}t = \delta_{nk} \frac{T}{2}, \qquad (14.124)$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin k\omega t \cdot \mathrm{d}t = \delta_{nk} \frac{T}{2},$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \neq k \\ 1, & \text{dacă } n = k \end{cases} \quad \text{(simbolul lui Kronecker)}, \qquad (14.125)$$

rezultă formulele pentru coeficienți:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t = \langle f \rangle \text{ (valoarea medie a funcției)}, \qquad (14.126)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, \mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, \mathrm{d}\, t, \quad n \neq 0.$$

Folosind formulele lui Euler (14.24), dezvoltarea Fourier (14.122) se poate scrie cu ajutorul funcțiilor exponențiale:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - \mathrm{i} b_n), \qquad (14.127)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, n\omega t}\, \mathrm{d}t, \quad c_{-n} = c_n^*. \qquad (14.128)$$

Prin urmare, oscilațiile *periodice* oarecare se descompun în oscilații armonice, sinusoidale, cu frecvențe egale cu multipli întregi $n\omega$ ai frecvenței fundamentale $\omega = \frac{2\pi}{T}$, unde T este perioada oscilației. *Spectrul oscilației* este dat de diagrama în care sînt reprezentate amplitudinile în funcție de frecvență. El este format din linii verticale echidistante de diferite înălțimi (proporționale cu amplitudinile).

Descompunerea oscilațiilor în oscilații sinusoidale este importantă de exemplu în acustică la analiza sunetelor sau în electrodinamică.

14.9.2. OSCILAȚII APERIODICE

Dacă oscilația este *aperiodică*, atunci în locul seriei Fourier cu spectru de *linii* (discret), vor apărea oscilațiile sinusoidale cu frecvențele cuprinse într-un întreg *interval*, deci cu spectru *continuu*. Seria Fourier trece în integrala Fourier:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos [\omega t + \alpha(\omega)]\, \mathrm{d}\omega = \int_0^{\infty} a_\omega \cos (\omega t + \alpha_\omega)\, \mathrm{d}\, \omega \qquad (14.129)$$

sau sub formă complexă

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \omega t}\, \mathrm{d}\omega, \quad c(-\omega) = c^*(\omega), \qquad (14.130)$$

unde *densitatea de amplitudine* sau *densitatea spectrală* („anvelopa spectrului") este

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \omega t}\, \mathrm{d}\, t. \qquad (14.131)$$

Spectrul este reprezentat de graficul densității de amplitudine $a(\omega)$ (densitatea spectrală).

De exemplu, oscilația amortizată din fig. 14.27 are spectrul continuu din fig. 14.28.

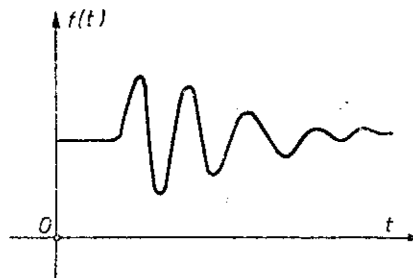


Fig. 14.27

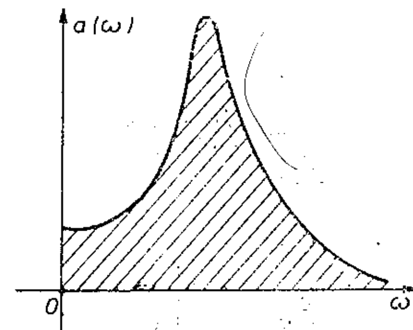


Fig. 14.28

Integrala Fourier devine mai simplă în cazul unei funcții *pare*:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a_\omega \cos \omega t\, \mathrm{d}\omega, \quad a_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t\, \mathrm{d}t \qquad (14.132)$$

şi în cazul unei funcţii *impare*:

$$f(t) = \int_0^\infty b_\omega \sin \omega t \, d\omega, \quad b_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt. \qquad (14.133)$$

Exemple. 1. Oscilaţiile dreptunghiulare din fig. 14.29 fiind simetrice faţă de SC ales, vor conţine numai cosinusuri:

$$a_0 = \frac{h\tau}{T} = \frac{h\omega\tau}{2\pi}, \quad a_n = \frac{2h}{\pi n} \sin \pi n \frac{\tau}{T} = \frac{2h}{\pi n} \sin \frac{1}{2} n\omega\tau; \quad b_n \equiv 0; \qquad (14.134)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{\pi n} \sin \frac{n\omega\tau}{2} \cdot e^{i n\omega t} =$$

$$= \frac{h\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{\pi n} \sin \frac{\pi n \tau}{T} \cdot \cos \frac{2\pi n t}{T}. \qquad (14.135)$$

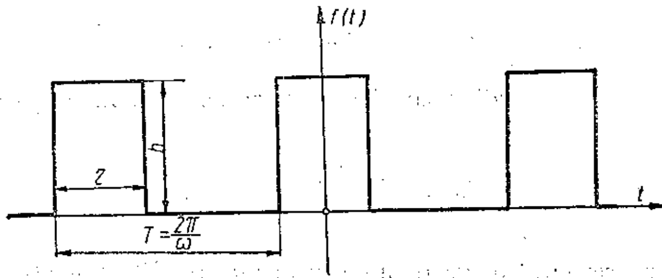


Fig. 14.29

Spectrul este reprezentat în fig. 14.30.

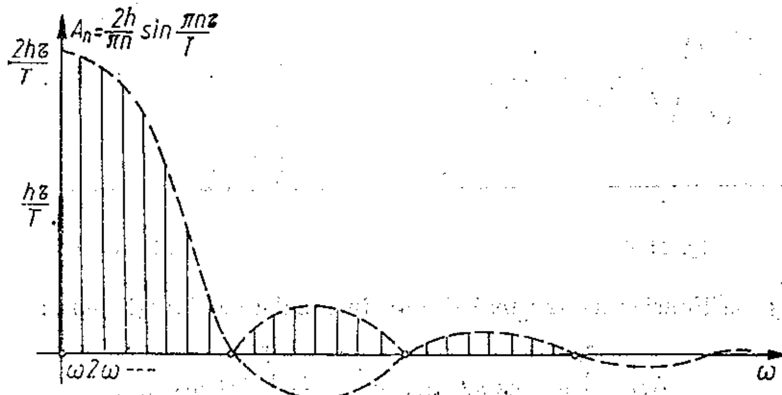


Fig. 14.30

2. Mişcarea *aperiodică* $f(t) = A\,e^{-bt}$, $t \geqslant 0$ (fig. 14.31), se descompune în integrala Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{A}{b + i\omega} \qquad (14.136)$$

sau

$$f(t) = \int_0^\infty a_\omega \cos(\omega t + \alpha_\omega)\, d\omega, \qquad (14.137)$$

$$a_\omega = 2\,|c(\omega)| = \frac{1}{\pi} \frac{A}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}; \quad \alpha_\omega = -\arg c(\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega}{b}. \qquad (14.138)$$

Spectrul este dat de a_ω şi este reprezentat în fig. 14.32.

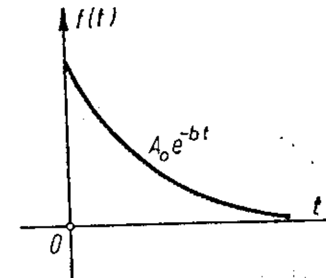


Fig. 14.31

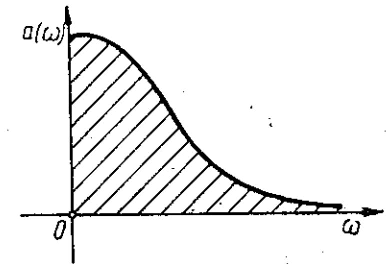


Fig. 14.32

14.9.3. FORŢA OARECARE

Dacă asupra sistemului oscilant acţionează o forţă oarecare $F(t)$ periodică sau nu, atunci descompunînd-o în serie sau integrală Fourier, calculăm oscilaţiile forţate produse *separat* de fiecare oscilaţie sinusoidală componentă. Deoarece ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor amortizate este *liniară*, suma soluţiilor individuale este de asemenea o soluţie (principiul suprapunerii). Rezultatul va fi deci suprapunerea (suma) oscilaţiilor forţate individuale. Prin urmare, oscilaţia forţată rezultată va fi reprezentată de seria (sau integrala) Fourier corespunzătoare.

De exemplu,

$$F(t) = \sum A_n \cos(n\Omega t + \alpha_n); \quad x = \sum B_n \cos(n\Omega t + \beta_n), \qquad (14.139)$$

unde

$$B_n = \frac{A_n}{n\Omega \sqrt{r^2 + (n\Omega m - k/n\Omega)^2}}, \quad \operatorname{tg}(\beta_n - \alpha_n) = \frac{r}{n\Omega m - k/n\Omega}. \qquad (14.140)$$

Dacă una din frecvenţele componente $n\Omega$ coincide sau este foarte apropiată de frecvenţa de rezonanţă ω_{rez} a sistemului oscilant, acesta intră în rezonanţă, şi dacă amortizarea sa este mică, rezonanţa va fi foarte ascuţită. Astfel se explică faptul că putem obţine rezonanţă cu ajutorul unor impulsuri (de formă oarecare) dar cu frecvenţa de repetiţie egală cu un submultiplu întreg al frecvenţei de rezonanţă.

Dacă avem un set de rezonatori cu amortizări foarte mici, atunci vor intra în rezonanţă acei rezonatori ale căror frecvenţe proprii de rezonanţă coincid cu frecvenţele componente ale oscilaţiilor aplicate. Astfel se poate face analiza oscilaţiilor (de exemplu, frecvenţmetrul cu lamele rezonante folosit pentru curentul alternativ industrial).

PROBLEME

14.1. O particulă se mişcă de-a lungul axei Ox după legea $x = C\cos^2(\omega t + \alpha)$. Să se afle amplitudinea şi perioada oscilaţiilor. Care este ecuaţia „traiectoriei" în spaţiul fazelor (v, x)?

R. $A = C/2$, $T = \pi/\omega$; $v^2 = 4\omega^2 x(C - x)$.

14.2. Un pendul simplu gravitaţional a cărui bilă are densitate ρ este cufundat într-un lichid de densitate ρ_0. Care este perioada micilor oscilaţii?

R. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{\rho}{\rho - \rho_0}}.$$

14.3. De capătul unui resort vertical de constantă elastică k este fixat un corp de masă m. Cu ce distanţă maximă coboară corpul lăsat liber, dacă în momentul iniţial viteza lui este zero şi resortul nu este întins?

R. $x_m = 2mg/k$.

14.4. Un corp de masă m este suspendat de un fir perfect flexibil şi perfect elastic de constantă elastică k. Corpul este deplasat în jos şi lăsat apoi liber să oscileze pe verticală. Care este deplasarea maximă admisibilă pentru ca oscilaţiile să fie armonice?

R. $A_{max} = mg/k$.

14.5. Un areometru (sau densimetru) de masă m şi cu diametrul tubului cilindric vertical d efectuează mici oscilaţii verticale cu perioada T într-un lichid. Care este densitatea lichidului?

R. $$\rho = \frac{16\pi m}{gT^2d^2}.$$

14.6. Un corp de masă m este suspendat de un resort. O particulă de masă m' cade cu viteza v pe corpul m de care se lipeşte. Alungirea statică produsă de particula m' este x_0. Să se afle amplitudinea oscilaţiilor sistemului $(m + m')$.

R. $$A = x_0\sqrt{1 + \frac{v^2m'}{x_0 g(m + m')}}.$$

14.7. Pe un platan de masă neglijabilă, atîrnat de un resort, cade fără viteză iniţială un corp de la înălţimea h deasupra platanului. Considerînd că ciocnirea corpului cu platanul este plastică, să se afle amplitudinea oscilaţiilor platanului. La echilibru acelaşi corp alungeşte resortul cu x_0.

R. $A_0 = x_0\sqrt{1 + 2h/x_0}$.

14.8. În mijlocul unei corzi elastice orizontale de lungime l, întinsă cu forţa constantă F, este suspendat un corp de masă m. Să se afle perioada micilor sale oscilaţii. (Se neglijează gravitaţia).

R. $T = \pi\sqrt{ml/F}$.

14.9. O particulă oscilează de-a lungul axei Ox după legea $x = A\cos(\omega t + \alpha)$. Să se calculeze densitatea de probabilitate $w(x)$, unde $w(x)\,dx$ este probabilitatea de a găsi particula pe intervalul $(x, x + dx)$.

R. $$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

14.10. O scîndură omogenă este aşezată orizontal şi transversal pe doi cilindri în rotaţie, ca în fig. 14.33. Distanţa dintre axele cilindrilor este l, iar coeficientul de frecare la lunecare este μ. Să se arate că scîndura va oscila sinusoidal şi să se afle perioada.

R. $$T = \pi\sqrt{\frac{2l}{\mu g}}.$$

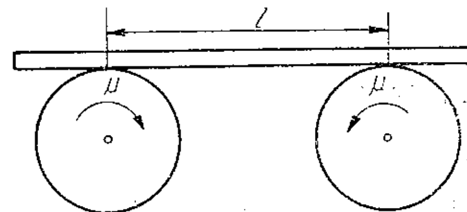


Fig. 14.33

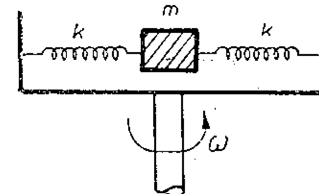


Fig. 14.34

14.11. Un manşon de masă m poate culisa fără frecare pe o tijă orizontală, fiind prins cu două resoarte identice, de constantă k, de pereţii vasului din fig. 14.34. Să se calculeze perioada micilor oscilaţii ale manşonului, dacă vasul este rotit cu viteza unghiulară ω.

R. $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2k/m - \omega^2}}.$$

14.12. Un corp de masă m, aşezat pe o masă netedă, este legat printr-un resort orizontal de masă m' şi constantă k de un perete. Să se afle frecvenţa oscilaţiilor corpului (se neglijează frecările şi se consideră că toate punctele resortului oscilează în fază).

R. $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}.$$

14.13. De capetele unui resort cu constanta elastică k sînt prinse două bile de mase $m_{1,2}$. Neglijînd forţele gravitaţionale, să se afle frecvenţa de oscilaţie a resortului, iniţial întins (sau comprimat) şi apoi lăsat liber.

R. $$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

14.14. La capetele unei tije fine orizontale cu constanta de torsiune C sînt fixate două discuri cu momentele de inerţie $I_{1,2}$. Care este perioada oscilaţiilor de torsiune ale tijei?

R. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1 I_2}{C(I_1 + I_2)}}.$$

14.15. Un pendul este format dintr-o tijă subţire rigidă avînd la capăt o sferă de rază R cu pereţii foarte subţiri, conţinînd un lichid ideal. Distanţa de la axa de suspensie pînă la centrul sferei este l (fig. 14.35). De cîte ori creşte perioada micilor oscilaţii, dacă lichidul îngheaţă (neglijînd variaţia de volum prin solidificare)?

R. $$T'/T = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}}.$$

14.16. O tijă omogenă de masă m și lungime l poate oscila într-un plan vertical, avînd însă capătul inferior prins la mijlocul unui resort orizontal de constantă elastică k (fig. 14.36). Să se afle frecvența micilor oscilații.

R. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}\left(1 + \frac{8kl}{mg}\right)}$.

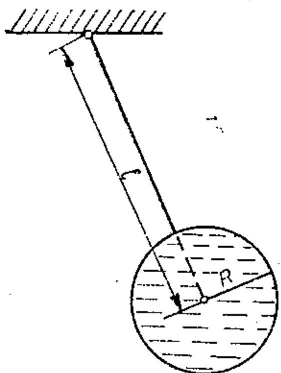


Fig. 14.35

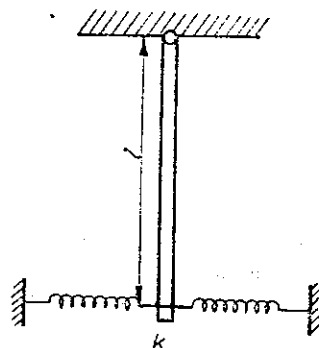


Fig. 14.36

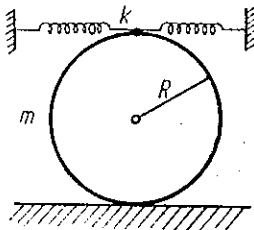


Fig. 14.37

14.17. Un cilindru omogen de masă m execută mici oscilații de rostogolire fără lunecare pe un plan orizontal, fiind prins la periferie de mijlocul unui resort orizontal de constantă elastică k, ca în fig. 14.37. Care este perioada oscilațiilor?

R. $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3m}{2k}}$.

14.18. Un pendul fizic este rotit cu 180° față de poziția sa verticală de echilibru și lăsat liber. Știind că el trece prin poziția verticală de echilibru cu viteza unghiulară ω, să se afle perioada micilor oscilații ale pendulului.

R. $T = \frac{4\pi}{\omega}$.

14.19. Un pendul fizic oscilează cu frecvența ω_1. Dacă i se atașează un corp mic de masă m la distanța h de axa de suspensie, frecvența devine ω_2. Care este momentul de inerție al pendulului fizic față de axa de rotație?

R. $I = mh^2 \frac{\omega_2^2 - g/h}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$.

14.20. Două pendule fizice au perioadele $T_{1,2}$ și momentele de inerție $I_{1,2}$ față de axa de oscilație. Dacă le cuplăm rigid, ce perioadă va avea pendulul fizic rezultant, în jurul aceleiași axe de suspensie?

R. $T = T_1T_2\sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_1T_2^2 + I_2T_1^2}}$.

14.21. La capătul liber al unei bare orizontale (de masă neglijabilă), încastrată la celălalt capăt, este atîrnat printr-un fir un corp de masă m. Bara are lungimea l, momentul geometric J și modulul de elasticitate E. Care va fi perioada oscilațiilor corpului? Pentru ce amplitudine a oscilațiilor firul de suspensie va începe să se stringă?

R. $T = 2\pi l\sqrt{\frac{ml}{3EJ}}$, $A > \frac{mgl^3}{3EJ}$.

14.22. La mijlocul unei bare orizontale (de masă neglijabilă), sprijinită orizontal la capete pe două reazeme, este așezat un corp de masă m. Bara are lungimea l, momentul geometric J și modulul de elasticitate E. Care va fi perioada oscilațiilor corpului? Pentru ce amplitudine a oscilațiilor corpul începe să se desprindă de bară?

R. $T = 2\pi l\sqrt{\frac{ml}{48\,EJ}}$, $A > \frac{mgl^3}{48\,EJ}$.

14.23. Să se afle amplitudinea inițială A_0 și faza inițială α a oscilațiilor amortizate, știind constantele m, k, r, precum și condițiile inițiale: poziția x_0 și viteza v_0 la $t = 0$.

R. $A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0^2 + bx_0)^2/\omega^2}$, $\alpha = \arccos \frac{x_0}{A_0}$.

14.24. Un pendul simplu gravitațional are lungimea l. Știind timpul de relaxare τ a oscilațiilor amortizate, să se calculeze decrementul logaritmic.

R. $D = \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l}{g\tau^2}}}$.

14.25. Un pendul simplu gravitațional oscilează amortizat, decrementul logaritmic fiind D. Știind că după un timp τ energia mecanică a pendulului a scăzut de e ori, să se afle lungimea pendulului.

R. $l = \frac{4g\tau^2}{1 + 4\pi^2/D^2}$.

14.26. Un corp de masă m suspendat la capătul unui resort de constantă elastică k, efectuează oscilații verticale amortizate. Știind că după N_0 oscilații, amplitudinea oscilațiilor scade de e ori, să se afle decrementul logaritmic, perioada oscilațiilor amortizate, coeficientul de amortizare.

R. $D = \frac{1}{N_0}$, $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2N_0^2}}$, $b = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2N_0^2}}$.

14.27. De cîte ori trebuie să crească coeficientul de amortizare pentru ca oscilațiile pseudoperiodice cu decrementul D să treacă în mișcarea amortizată aperiodică?

R. $b'/b = \sqrt{1 + 4\pi^2/D^2}$.

14.28. Să se scrie expresia vitezei oscilațiilor amortizate. De cîte ori se micșorează după o perioadă viteza unui corp ce execută oscilații amortizate cu decrementul logaritmic D?

R. $v = \omega A_0 e^{-bt} \cos\left(\omega' t + \alpha + \frac{\pi}{2} + \text{arc tg}\frac{b}{\omega'}\right); \quad \frac{v(t)}{v(t+T')} = e^D.$

14.29. O particulă deplasată din poziția sa de echilibru cu A_0 este lăsată liberă. Ce distanță parcurge particula pînă la oprirea sa completă, știind decrementul logaritmic D?

R. $s = A_0 \frac{1 + e^{-D/2}}{1 - e^{-D/2}}.$

14.30. Un corp de masă m, așezat pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare la lunecare μ, este legat printr-un resort orizontal nedeformat, de constantă k, de un perete. Corpul este deplasat astfel încît resortul se lungește cu A, apoi lăsat liber. Să se afle perioada oscilațiilor corpului și numărul de oscilații efectuate pînă la oprirea corpului.

R. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad N = A\frac{k}{4\mu m g} - \frac{1}{4}.$

14.31. Să se calculeze raportul B_{max}/B_{stat} cunoscînd decrementul logaritmic D.

R. $\frac{B_{max}}{B_{stat}} = \frac{\pi}{D} + \frac{D}{4\pi}.$

14.32. Amplitudinea oscilațiilor forțate este aceeași pentru două frecvențe $\Omega_{1,2}$. Să se afle frecvența de rezonanță a elongațiilor.

R. $\omega_{rez} = \sqrt{\frac{1}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}.$

14.33. O bilă de masă m alungește static un resort cu x_0. Știind că bila efectuează oscilații verticale forțate pe resort, sub acțiunea unei forțe sinusoidale periodice de amplitudine F_0, cu decrementul logaritmic D, să se afle frecvența de rezonanță și amplitudinea la rezonanță (rezonanța elongațiilor).

R. $\omega_{rez} = \sqrt{\frac{g}{x_0}\frac{1 - D^2/4\pi^2}{1 + D^2/4\pi^2}}, \quad B_{max} = \frac{F_0 D x_0}{4\pi m g}\left(1 + \frac{4\pi^2}{D^2}\right).$

14.34. Un pendul elastic are perioada oscilațiilor neamortizate T. Asupra corpului acționează o forță sinusoidală de amplitudine F_0 și o forță de frecare proporțională cu viteza. La rezonanța vitezelor, amplitudinea oscilațiilor este B_0. Să se afle coeficientul de rezistență și puterea medie disipată la rezonanța vitezelor.

R. $r = \frac{F_0 T}{2\pi B_0}, \quad P_{max} = \frac{\pi F_0 B_0}{T}.$

14.35. Pentru două frecvențe $\Omega_{1,2}$ ale forței sinusoidale perturbatoare, amplitudinea vitezei se reduce la jumătate din valoarea maximă. Să se afle frecvența de rezonanță a vitezelor și coeficientul de amortizare.

R. $\omega = \sqrt{\Omega_1\Omega_2}, \quad b = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\sqrt{3}}.$

14.36. Să se determine raportul $P(\Omega) : P_{max}$ la rezonanța elongațiilor, știind raportul ω/b.

R. $\frac{P(\omega_{rez})}{P_{max}} = \frac{\omega^2/b^2 - 2}{\omega^2/b^2 - 1}.$

14.37. Să se dezvolte în serie trigonometrică oscilațiile triunghiulare din fig. 14.38

R. $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4h}{\pi\tau\omega n^2}\sin^2\frac{n\omega\tau}{4}\cdot e^{in\omega t} =$

$= \frac{h\tau}{2T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2hT}{\pi\tau n^2}\sin^2\frac{\pi n\tau}{2T}\cdot\cos n\omega t$

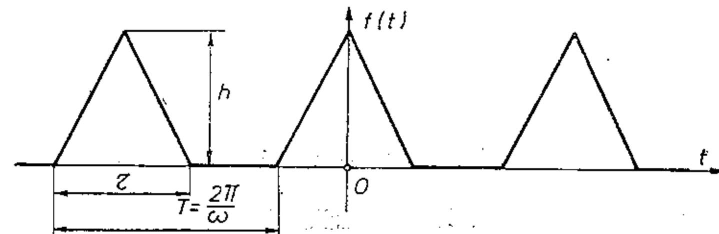


Fig. 14.38

14.38. Să se dezvolte în serie trigonometrică oscilațiile în „dinți de ferăstrău“ din fig. 14.39.

R. $f(t) = \frac{h}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{h}{2\pi n} e^{i(n\omega t + \pi/2)} = \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{\pi n}\cdot\sin n\omega t.$

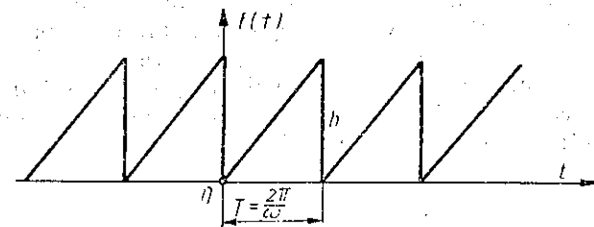


Fig. 14.39

14.39. Să se dezvolte în serie trigonometrică sinusoida „redresată“ $f(t) = A\,|\sin\omega t|$ din fig. 14.40.

R. $A\,|\sin\omega t| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2A}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}e^{i2n\omega t} = \frac{2A}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\cdot\cos 2n\omega t.$

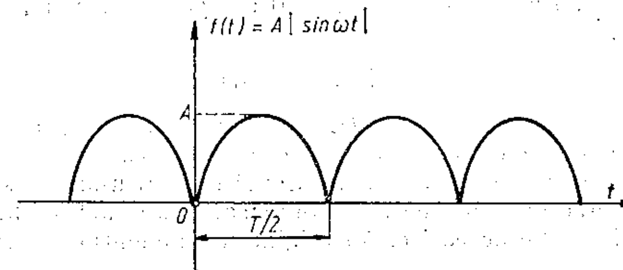


Fig. 14.40

14.40. Să se descompună în integrală Fourier oscilația amortizată aperiodică:

$$f(t) = A\,e^{-b|t|}.$$

R. $a(\omega) = \frac{2}{\pi}A\frac{b}{b^2+\omega^2}, \quad A\,e^{-b|t|} = \frac{2}{\pi}Ab\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega t}{b^2+\omega^2}\,d\omega.$

CAPITOLUL 15

UNDE ELASTICE

Mediile *continue*: gazele, lichidele, solidele, sînt sisteme de particule *legate*, adică de particule (molecule, atomi sau ioni) care interacţionează între ele. De aceea, dacă una din particule oscilează, vor oscila după ea şi particulele vecine; oscilaţiile se vor propaga în mediu de la particulă la particulă sub formă de unde, numite *unde elastice* (spre deosebire, de exemplu, de undele electromagnetice în vid sau în substanţă). Această *nelocalizabilitate* a oscilaţiilor este caracteristică tuturor mediilor continue. Propagarea undei nu se face instantaneu, ci cu o viteză *finită* c.

15.1. UNDA PLANĂ PROGRESIVĂ NEATENUATĂ

Dacă toate particulele situate într-un plan perpendicular pe direcţia de propagare a undei oscilează identic, unda se numeşte *plană*.

Fie o undă plană care se propagă *fără atenuare* în direcţia axei Ox cu viteza constantă c. Dacă în originea $x = 0$ elongaţia ξ a particulei urmează o anumită lege:

$$\xi(0, t) = f(t), \tag{15.1}$$

atunci în oricare punct x de pe axa Ox elongaţia $\xi(x, t)$ a particulei de acolo, *măsurată de la poziţia sa de echilibru*, va parcurge aceleaşi valori ca în origine, dar cu o anumită întîrziere x/c, dată de timpul necesar undei ca să ajungă din origine pînă în punctul x considerat. Prin urmare, în punctul x la momentul t elongaţia trebuie să fie aceeaşi ca în origine la momentul $t - x/c$:

$$\xi(x, t) = \xi(0, t - x/c) = f(t - x/c) = F(x - ct). \tag{15.2}$$

Elongaţiile $\xi(x, t)$ ale particulelor, măsurate de la poziţiile lor de echilibru x, pot fi atît în direcţia de propagare a undei, atunci unda se numeşte *longitudinală*, cît şi într-o direcţie perpendiculară pe direcţia de propagare, atunci unda se numeşte *transversală*. Mai general, ξ poate desemna şi o mărime fizică ondulatorie oarecare, precum cîmpul electric sau magnetic într-o undă electromagnetică.

Expresia (15.2) reprezintă ecuaţia unei *unde plane progresive* care se propagă fără atenuare în sensul pozitiv al axei Ox cu viteza c. Pentru unda care se propagă în sensul invers al axei Ox, c trece în $-c$:

$$\xi(x, t) = f(t + x/c) = F(x + ct). \tag{15.3}$$

Particulele situate într-un plan perpendicular pe direcţia de propagare a undei oscilează identic, de aceea unda se numeşte *plană*.

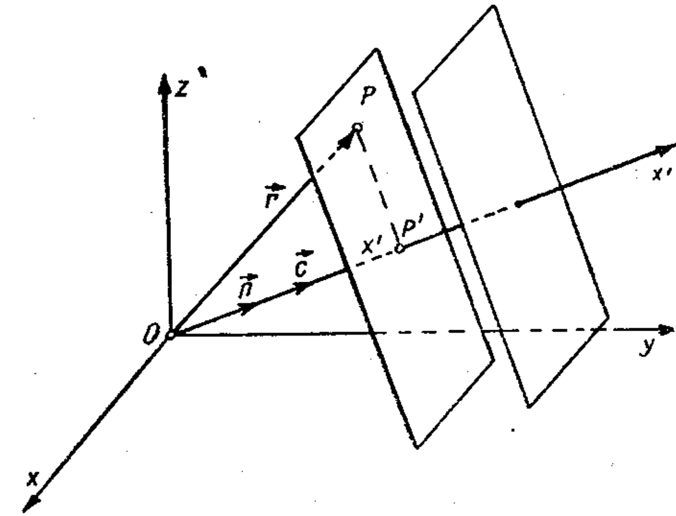


Fig. 15.1

Pentru unda plană *progresivă* este *caracteristică* dependenţa elongaţiilor ξ de combinaţia $u = t \mp x/c$ (sau $x \mp ct$) şi *nu* separat şi independent de x şi t. Dacă egalăm „faza" u cu o constantă, $x \mp ct = \text{const}$, găsim legea de propagare rectilinie uniformă $x = \pm ct + \text{const}$ a fazei (sau frontului) undei.

Dacă unda plană se propagă în direcţia versorului $\vec{n}$ (fig. 15.1), elongaţia particulei dintr-un punct P de rază vectoare $\vec{r}$ va fi aceeaşi ca a particulei $P'(x')$, $x' = \vec{r}\,\vec{n}$:

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi(x', t) = \xi(0, t - x'/c) = f\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right). \tag{15.4}$$

15.2. UNDA PLANĂ MONOCROMATICĂ

În unda plană *monocromatică*, oscilaţiile în fiecare punct sînt *armonice* (sinusoidale), de o anumită frecvenţă ω:

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t = f(t),$$

$$\xi(x, t) = f(t - x/c) = A \cos \omega(t - x/c). \tag{15.5}$$

Elongaţia ξ este nu numai periodică în timp, cu perioada $T = 2\pi/\omega$, ci *periodică şi în spaţiu*, în raport cu coordonata x, cu perioada λ, numită *lungime de undă*, care rezultă din condiţia de periodicitate spaţială :

$$\cos\omega\left(t - \frac{x+\lambda}{c}\right) = \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \rightarrow \frac{\omega\lambda}{c} = 2\pi,$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT = \frac{c}{\nu}. \tag{15.6}$$

Lungimea de undă *este egală cu distanţa parcursă de undă în timpul unei perioade T*, sau altfel spus, cu distanţa dintre două maxime (minime sau anulări) succesive ale undei în spaţiu la un moment dat.

Ecuaţia undei (15.5) se mai poate scrie sub forma :

$$\xi = A\cos\omega(t - x/c) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\cos(\omega t - kx), \tag{15.7}$$

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{\omega}{c}, \tag{15.8}$$

unde k se numeşte *număr de undă*, egal cu numărul de unde care se cuprind în 2π unităţi de lungime. Mai general, se defineşte *vectorul de undă* $\vec{k}$ avînd modulul $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ şi fiind orientat în direcţia şi sensul de propagare a undei :

$$\vec{k} \stackrel{\text{def}}{=} k\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n}. \tag{15.9}$$

Atunci ecuaţia undei plane monocromatice care se propagă în spaţiu în direcţia şi sensul vectorului de undă $\vec{k}$ se scrie :

$$\xi = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \mathrm{Re}\,\{Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\} \tag{15.10}$$

Argumentul cosinusului se numeşte *faza undei* :

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \omega t - \vec{k}\vec{r}. \tag{15.11}$$

Suprafeţele de undă *sînt suprafeţe de fază constantă şi ele sînt perpendiculare (în medii izotrope) pe direcţia de propagare a undei.* În adevăr, ecuaţia $\omega t - \vec{k}\vec{r} = \text{const}$ reprezintă ecuaţia unui plan în fiecare moment, vectorul $\vec{k}$ fiind perpendicular pe acest plan.

Normalele pe suprafeţele de undă se numesc **raze.**

În cazul considerat mai sus, suprafeţele de undă sînt plane, normale pe direcţia de propagare.

Viteza undei plane monocromatice coincide cu viteza de deplasare a fazei, numită *viteză de fază*. Dacă faza din punctul x la momentul t a ajuns în punctul $x + dx$ la momentul $t + dt$, înseamnă că

$$\varphi = \omega t - kx = \omega(t + dt) - k(x + dt) \rightarrow d\varphi = \omega\,dt - k\,dx = 0,$$

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = c. \tag{15.12}$$

Importanţa studiului undelor *plane monocromatice* (15.10) este deosebită, deoarece o undă oarecare poate fi descompusă totdeauna în unde plane monocromatice (descompunem, de exemplu, funcţia $f(t)$ (15.1) în serie sau integrală Fourier), analog descompunerii unei oscilaţii oarecare în oscilaţii armonice sinusoidale.

Undele elastice se numesc şi unde sonore sau sunete şi se împart în 3 game : *infrasunete* cu frecvenţe sub 16 Hz ; *sunete auzibile* cu frecvenţe între 16 Hz şi 20 kHz (lungimi de undă în aer între 20 m şi 2 cm) şi *ultrasunete* cu frecvenţe peste 20 kHz (pînă la ~ 10 GHz).

15.3. DEFORMAŢIA SOLIDELOR PRODUSĂ DE UNDE

Undele longitudinale se pot propaga atît în solide cît şi în fluide, în timp ce undele transversale se pot propaga numai în solide, deoarece în fluide nu există forţe elastice la forfecare, adică forţe proporţionale cu distanţa de lunecare a unui strat faţă de altul, care să transmită oscilaţiile transversale.

15.3.1. DEFORMAŢIILE ÎN UNDA LONGITUDINALĂ

Să considerăm întîi o undă plană *longitudinală*. Din cauza deplasării particulelor în direcţia propagării, mediul elastic este în fiecare moment deformat. Să calculăm *deformaţia relativă* $\varepsilon(x, t)$ în punctul (planul) $P(x)$ la momentul t. Pentru aceasta să considerăm un punct (plan) infinit apropiat $Q(x + dx)$ (fig. 15.2). Coordonatele x, $x + dx$ reprezintă poziţiile de *repaus* (de echilibru) ale particulelor, astfel încît $PQ = dx$ este lungimea nedeformată a stratului. La momentul t particula din $P(x)$ are elongaţia $\xi(x, t)$ şi deci se

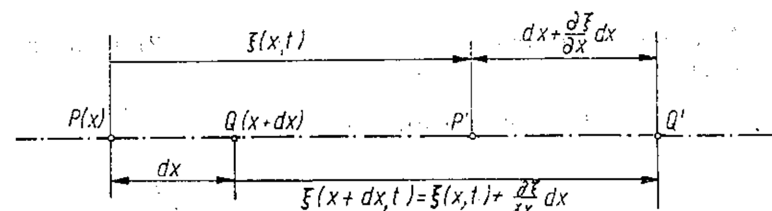


Fig. 15.2

află deplasată în $P'(x + \xi)$, iar particula din $Q(x + dx)$ se află atunci deplasată în $Q'\left(x + dx + \xi + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx\right)$, deoarece elongaţia din punctul infinit vecin $Q(x + dx)$ este $\xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx$. Lungimea segmentu-

lui (stratului) $PQ = dx$ devine deci la momentul t egală cu $P'Q' = dx + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx$. Alungirea absolută va fi $P'Q' - PQ = \frac{\partial\xi}{\partial x}dx$, de unde deformaţia relativă :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{15.13}$$

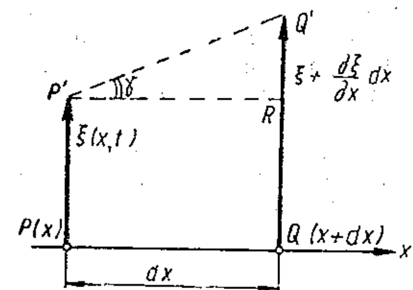


Fig. 15.3

Cealaltă derivată parţială a elongaţiei dă evident viteza particulei :

$$v(x, t) = \frac{\partial\xi}{\partial t} = \dot{\xi}. \tag{15.14}$$

15.3.2. DEFORMAŢIILE ÎN UNDA TRANSVERSALĂ

În cazul propagării undei *transversale* în direcţia axei Ox, particulele au deplasări $\xi(x, t)$ transversale (perpendiculare) pe direcţia de propagare Ox. Două puncte infinit vecine cu poziţiile de *echilibru* în $P(x)$, $Q(x + dx)$ se vor afla deplasate la momentul t în poziţiile $P'(x, \xi)$, respectiv $Q'\left(x + dx, \ \xi + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx\right)$ (fig. 15.3). Unghiul de lunecare (forfecare) γ al planului din Q faţă de planul din P, unghi considerat mic, rezultă din raportul catetelor $RQ' = \frac{\partial\xi}{\partial x}dx$ şi $P'R = dx$, deci

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{15.15}$$

Deformaţia elastică, de alungire sau de lunecare, este egală cu derivata parţială a elongaţiei în raport cu coordonata.

15.3.3. DEFORMAŢIILE PRODUSE DE UNDA PLANĂ PROGRESIVĂ

În cazul undei *plane progresive neatenuate* (15.2) avem (v — viteza particulelor) :

$$\xi(x, t) = f(t - x/c) = f(u), \text{ unde } u = t - x/c, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c},$$

$$v = \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{1}{c}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{v}{c},$$

de unde deformaţia relativă sau unghiul de lunecare :

$$\varepsilon(x, t) \text{ sau } \gamma(x, t) = \frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{v}{c}. \tag{15.16}$$

Deformaţia de alungire sau lunecare este egală cu raportul, cu semn schimbat, dintre viteza particulei şi viteza undei.

Pentru unda progresivă care se propagă în sensul invers (negativ) al axei Ox avem :

$$\varepsilon \text{ sau } \gamma = \frac{\partial\xi}{\partial x} = +\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{v}{c}. \tag{15.17}$$

Deformaţia $\varepsilon(x, t)$ sau $\gamma(x, t)$ este maximă acolo unde viteza particulelor $v(x, t)$ este maximă, deci în punctele unde particulele trec prin poziţiile lor de echilibru. Acolo unde viteza particulelor v este în acelaşi sens cu sensul de propagare al undei longitudinale avem o regiune de comprimare ($\varepsilon < 0$), iar acolo unde viteza particulelor este în sens opus avem o regiune de rarefiere ($\varepsilon > 0$).

15.3.4. DEFORMAŢIILE ÎN UNDA MONOCROMATICĂ

În particular, în cazul undei *plane monocromatice* (15.7) avem :

$$\varepsilon(x, t) \text{ sau } \gamma(x, t) = \frac{\omega A}{c}\sin\omega(t - x/c) = \frac{2\pi}{\lambda}A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = $$
$$= kA\sin(\omega t - kx). \tag{15.18}$$

Deformaţiile sînt nule acolo unde elongaţiile sînt maxime şi reciproc, sînt maxime acolo unde elongaţiile sînt nule. Aceasta se vede uşor pe o undă transversală. În fig. 15.4 am reprezentat porţiuni egale din două plane vecine, în punctele de maxim şi de zero ale elongaţiilor. În maxime cele două plane vecine sînt egal deplasate transversal din poziţiile lor de echilibru şi deformaţia de lunecare (a unui plan faţă de celălalt) este nulă ; în schimb în punctele de zero, cele două plane vecine sînt deplasate în sensuri opuse şi lunecarea este maximă.

La fel, într-o undă longitudinală, comprimările şi rarefierile vor fi maxime în punctele de zero ale elongaţiilor : acolo două plane vecine (de o parte şi de cealaltă a punctului de zero) se apropie sau se depărtează între ele, pe cînd în punctele de maxim ele se mişcă la fel în acelaşi sens.

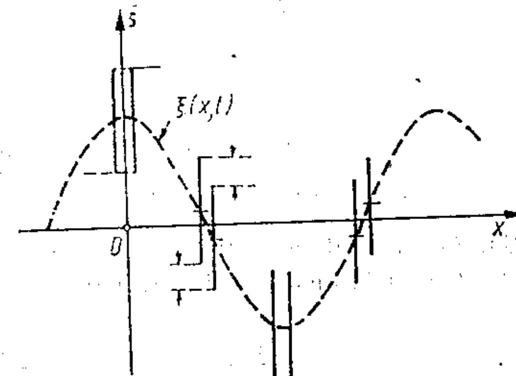


Fig. 15.4

Ca ordin de mărime pentru sunetele obişnuite :

$$\varepsilon_{max} \text{ sau } \gamma_{max} = \frac{\omega A}{c} = kA = 2\pi\frac{A}{\lambda} \sim 2\pi\frac{10^{-2}\text{ mm}}{10^3\text{ mm}} \approx 10^{-4} = 0{,}01\%. \tag{15.19}$$

Ca ordin de mărime deformaţiile relative sînt egale cu raportul dintre amplitudinea de oscilaţie a particulelor şi lungimea de undă.

15.4. ECUAȚIA UNDELOR

Derivînd încă o dată pe $\partial f/\partial x$, obținem *ecuația undelor*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \qquad (15.20)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \text{ sau } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \text{ sau } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f = 0.$$

Prin urmare, undele $\xi(x, t) = f(t \mp x/c)$ verifică această ecuație diferențială cu derivate parțiale și, reciproc, soluția generală a acestei ecuații este o suprapunere a celor două soluții, undele $f_1(t - x/c) + f_2(t + x/c)$.

În cazul propagării într-o direcție oarecare în spațiu, ecuația undelor se poate obține analog, pornind de la unda plană (15.4):

$$f\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right) = f(u), \; u = t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} = t - \frac{1}{c}(n_x x + n_y y + n_z z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}, \; \frac{\partial u}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right) = -\frac{n_x}{c},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{n_x}{c}\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{n_x}{c}\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{n_x}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = -\frac{n_x}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{n_x^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Sumînd derivatele parțiale ($n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2 = 1$), rezultă *ecuația undelor* (pentru medii omogene și izotrope):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f = \text{lap}\, f \qquad (15.21)$$

(Δ este operatorul lui Laplace, pe scurt laplacean) sau

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f = \Box f = \text{dal}\, f = 0 \qquad (15.22)$$

($\Box$ este operatorul lui D'Alembert). Pentru unda plană care se propagă în direcția axei Ox regăsim de aici ecuația (15.20).

Vom avea nevoie de ecuația undelor pentru calculul vitezei de propagare c, care apare la pătrat la numitorul derivatei după timp. Ecuația undelor se obține din ecuația fundamentală a dinamicii scrisă pentru un element dm: $dm \cdot a = dF$.

15.5. VITEZA UNDELOR ÎN SOLIDE

15.5.1. VITEZA UNDELOR LONGITUDINALE

Să calculăm viteza undelor *longitudinale* într-o *bară* și într-un *mediu elastic nemărginit*. Legătura dintre tensiunea elastică $\sigma(x, t) = F/S_0$ și deformația longitudinală $\varepsilon(x, t)$ este dată de legea lui Hooke (12.1), respectiv (12.17):

bară:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{S_0} F(x, t) = E\varepsilon(x, t) = E\frac{\partial \xi}{\partial x}; \qquad (15.23)$$

mediu elastic nemărginit:

$$\sigma(x, t) = E'\varepsilon = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon, \; (E' \approx 1{,}35\, E). \qquad (15.24)$$

Un strat infinit de subțire dx cu masa $dm = \rho_0 S_0\, dx$ (ρ_0 — densitatea *în absența* undei) va fi supus la forța rezultantă $dF = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \cdot S_0$ (fig. 15.5). Conform legii fundamentale a mecanicii:

$$dm\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\, S_0, \; \rho_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \qquad (15.25)$$

Pentru bară:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial \xi}{\partial x}, \; \rho_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \qquad (15.26)$$

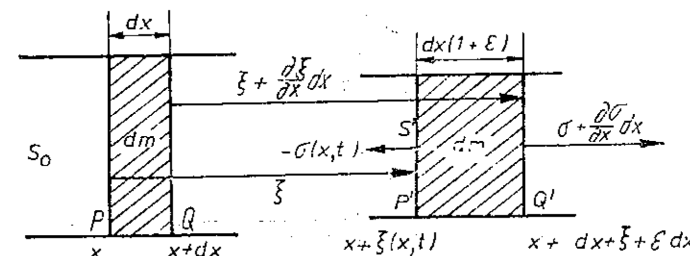


Fig. 15.5

de unde, în virtutea ecuației undelor (15.20), rezultă viteza undelor longitudinale în bară (indicele lui ρ_0 de obicei se omite în rezultatul final):

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ (formula lui Newton).} \qquad (15.27)$$

Pentru mediu elastic nemărginit, conform lui (15.24), viteza undelor longitudinale va fi:

$$c_l' = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}} > c_l, \ (c_l' \approx 1{,}16\, c_l). \qquad (15.28)$$

Ca ordin de mărime:

$$c_l \sim \sqrt{2{,}1\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} : 10^4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \approx 4{,}5\cdot 10^3 \ \mathrm{m/s}.$$

15.5.2. VITEZA UNDELOR TRANSVERSALE

Pentru undele *transversale* forţa rezultantă asupra elementului de masă dm este transversală pe direcţia propagării, fiind dată de efortul elastic tangenţial datorit forfecării (lunecării): $\mathrm{d}F = \frac{\partial \tau}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}S$ (fig. 15.6). Scriind legea fundamentală a mecanicii pentru elementul de masă dm, obţinem analog lui (15.25):

$$\rho\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, \ \tau = G\gamma = G\,\frac{\partial \xi}{\partial x}, \ \rho\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = G\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \qquad (15.29)$$

de unde viteza undelor transversale:

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}} < c_l, \ (G < E), \qquad (15.30)$$

$$G \approx 0{,}4\,E, \ c_t \approx 0{,}62\,c_l,$$

unde G este modulul de forfecare (sau lunecare).

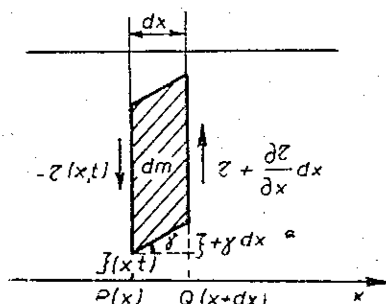


Fig. 15.6

Raportul vitezelor în mediul elastic nemărginit este

$$\frac{c_l'}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}} > 1. \qquad (15.31)$$

Pentru $\mu = 0{,}3$, rezultă $c_l'/c_t = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87$. Această deosebire în vitezele de propagare a celor două tipuri de unde este folosită în seismologie pentru determinarea poziţiei epicentrului cutremurelor. Întîi soseşte unda longitudinală care apare ca o vibraţie (trepidaţie) a podelei (fig. 15.7), apoi după un anumit timp (cîteva zeci de secunde) soseşte unda transversală care apare ca o vibraţie sau oscilaţie orizontală (legănare).

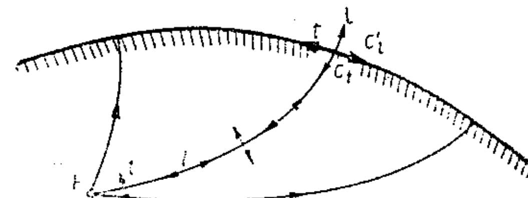


Fig. 15.7

Viteza sunetului în solide

	E, $\left[10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$	ρ, [g/cm³]	Coef. Poisson, μ	c_l, [m/s] 20°C	c'_l, [m/s]	c_t, [m/s]
Alamă	9,0	8,4—8,7	0,35	3 400	4 500	2 100
Aluminiu	7,0	2,70	0,34	5 240	6 400	3 130
Argint	7,7	10,5	0,37	2 800	3 700	1 694
Cupru	11,0	8,89	0,34	3 600	4 700	—
Fier	21,0	7,86	0,28	5 130	5 900	—
Lemn	0,9—1,7	0,7—0,9	—	3 600—4 000	—	—
Nichel	21,0	8,8	0,30	4 900	—	—
Oţel	20—22	7,8	0,28	5 100	6 000	—
Platină	17,0	21,45	0,39	2 800	3 960	—
Sticlă (crown)	6,0	2,4—2,8	0,25	5 000	5 700	3 300
Zinc	8,0	7,1	0,23	3 800	4 170	—

Valori extreme: Granit 6 000
Cauciuc vulcanizat (0°C) 54 m/s.

15.6. DENSITATEA ŞI PRESIUNEA FLUIDULUI ÎN UNDA SONORĂ

15.6.1. VARIAŢIA DENSITĂŢII

Considerînd un cilindru de fluid de secţiune S, în direcţia de propagare a undei plane, analog barei din fig. 15.5 (secţiunea nu se schimbă, fie că fluidul este închis într-un tub rigid, fie că este un mediu nemărginit), putem

calcula *variația de densitate* datorită prezenței undei, astfel (ρ_0 — densitatea fluidului *în absența* undei, fig. 15.8):

$$dm = \rho_0 S\, dx = \rho S\left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x}\, dx\right) = \rho S\, dx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

$$\rho - \rho_0 = \Delta\rho = -\rho\, \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\rho_0\, \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\rho - \rho_0)\, \frac{\partial \xi}{\partial x} \approx -\rho_0\, \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{15.32}$$

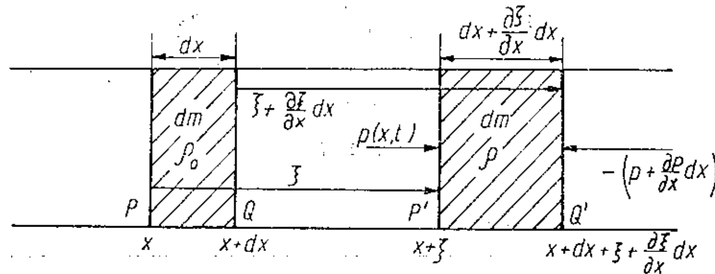


Fig. 15.8

unde am neglijat ultimul termen, deoarece în general deformațiile sînt foarte mici $|\partial\xi/\partial x| \ll 1$ și deci $|\rho - \rho_0| = |\Delta\rho| \ll \rho_0$. (Termenii de ordin superior sînt tratați în „acustica neliniară", noi vom trata numai aproximația *liniară*.)

Pentru unda *plană progresivă* (15.2), (15.16):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{v}{c}. \tag{15.33}$$

Variația relativă a densității unui fluid într-o undă progresivă este egală cu raportul dintre viteza particulelor și viteza undei.

15.6.2. VARIAȚIA PRESIUNII

Variația densității dă naștere la o *variație a presiunii*. Dacă în absența undei densitatea este ρ_0 și presiunea corespunzătoare p_0, atunci în prezența undei:

$$p - p_0 = \Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 (\rho - \rho_0) + \ldots \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \Delta\rho, \tag{15.34}$$

unde termenii superiori din dezvoltarea Taylor pot fi neglijați, deoarece $\Delta\rho$ și Δp sînt mici: $|\Delta\rho| \ll \rho_0$, $|\Delta p| \ll p_0$.

Deoarece oscilațiile sonore se efectuează foarte repede și conductivitatea termică a fluidelor este mică (față de cea a solidelor), căldura nu are timp să treacă de la un element al mediului la altul, deci trebuie presupus că propagarea sunetului este un proces *adiabatic*, adică în timpul propagării sunetului nu se face schimb de căldură între diferitele porțiuni ale mediului. Această ipoteză este confirmată de experiență, de aceea în expresia (15.34) variația presiunii în raport cu densitatea, $\partial p/\partial\rho$, trebuie calculată în condițiile unui proces *adiabatic*:

$$\Delta p = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad} \Delta\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad} \rho_0\, \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{15.35}$$

15.7. VITEZA UNDELOR ÎN FLUIDE

Aplicînd legea fundamentală a mecanicii unui strat infinit de subțire de fluid, supus forței rezultante $dF = -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx \cdot S$ (fig. 15.8), avem:

$$dm\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF = -S\, \frac{\partial p}{\partial x}\, dx = S\, dx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad} \rho_0\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

unde $\partial p/\partial x$ se obține derivînd (15.35). Prin urmare,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{15.36}$$

de unde viteza sunetului în fluid:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}}. \tag{15.37}$$

Atunci (15.35) dă

$$\Delta p = c^2\, \Delta\rho. \tag{15.38}$$

Variațiile de presiune $\Delta p = p - p_0$ în unda sonoră sînt proporționale cu variațiile de densitate $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ ale fluidului, constanta de proporționalitate c^2 fiind pătratul vitezei de propagare a undei.

Reamintindu-ne de modulul de compresiune

$$K = -V\, \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{m}{\rho}\, \frac{\partial p}{\partial \rho}\, \frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{\rho}\, \frac{\partial p}{\partial \rho}\left(-\frac{m}{V^2}\right) = \rho\, \frac{\partial p}{\partial \rho}, \tag{15.39}$$

$$K_{ad} = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{ad} = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad},$$

unde K_{ad} este modulul de compresiune adiabatică, putem scrie formula vitezei astfel:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho}\, K_{ad}}. \tag{15.40}$$

Variația de presiune (15.35) se poate scrie acum astfel :

$$\Delta p = p - p_0 = c^2\Delta\rho = -c^2\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial x} = -K_{ad}\frac{\partial\xi}{\partial x}. \qquad (15.41)$$

Variațiile de presiune și de densitate ale fluidului sînt proporționale între ele și sînt maxime acolo unde deformația mediului este maximă.

Pentru unda *plană progresivă* neatenuată

$$\Delta p = c^2\Delta\rho = K_{ad}\frac{v}{c} = \rho_0 c v, \qquad (15.42)$$

adică *variația de presiune* Δp *este proporțională cu viteza particulelor.*

Viteza sunetului în lichide

	θ [°C]	c [m/s]	K_{izot} [10^9 N/m²]
apă	0	1 407	2,04
petrol	25	1 225	1,45
mercur	20	1 451	26,2
alcool etilic	20	1 177	1,3

15.8. VITEZA UNDELOR ÎN GAZE

15.8.1. VITEZA SUNETULUI

Inițial, Newton a presupus că procesul de propagare a sunetului în gaze este un proces izoterm, care se produce la temperatura gazului. Atunci, folosind ecuația Boyle-Mariotte a transformării izoterme, obținem ușor modulul K_{izot} :

$$pV = \text{const}, \ \ln p + \ln V = \ln \text{const}, \ \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0,$$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{izot} = -\frac{p}{V}, \ K_{izot} = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)_{izot} = p. \qquad (15.43)$$

Modulul de compresibilitate izotermă al gazelor este egal cu presiunea gazului.

Viteza sunetului ar fi atunci $c = \sqrt{p/\rho}$. Experiența însă infirmă categoric această formulă. Laplace a dat o explicație corectă, considerînd că procesul de propagare a sunetului este *adiabatic* și nu izoterm.

Folosind ecuația transformării adiabatice a lui Poisson

$$pV^\gamma = \text{const}, \ \gamma = C_p/C_v = c_p/c_v, \qquad (15.44)$$

unde γ este exponentul adiabatic, egal cu raportul căldurilor molare sau specifice la presiune și volum constant ($\gamma > 1$; pentru gaze biatomice $\gamma \cong 1{,}40$), putem calcula modulul adiabatic K_{ad} :

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln \text{const}, \ \frac{dp}{p} + \gamma\frac{dV}{V} = 0, \qquad (15.45)$$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = -\gamma\frac{p}{V}, \ K_{ad} = \gamma p = \gamma K_{izot}, \qquad (15.46)$$

deci viteza sunetului în gaze ideale este (omitem indicele zero la ρ_0 și p_0 în rezultatul final) :

$$c = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}} = c_0\sqrt{1+\alpha\theta}, \qquad (15.47)$$

unde am folosit ecuația de stare a gazelor perfecte :

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \quad \rho = \frac{p\mu}{TR}, \qquad (15.48)$$

μ — masa molară (kg/kmol), $R = 8\,314{,}3$ J/kmol·K — constanta gazelor perfecte, $\alpha = \frac{1}{273{,}15}$ K^{-1} — coeficientul de dilatare izobară sau coeficientul termic al presiunii (izocor).

Viteza sunetului în gaze crește deci cu temperatura și nu depinde de presiune. În aer, la 20°C, $c = 340$ m/s, iar în apă la 20°C, $c = 1\,480$ m/s.

Viteza sunetului în gaze (m/s, 0°C)

aer (uscat)	331,46	NH_3	415
CO_2	260	N_2	333,64
H_2	1 286	CH_4	430
O_2	315		

15.8.2. VARIAȚIILE DE PRESIUNE ȘI DE DENSITATE

Din (15.45) rezultă pentru variații mici $\left(\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}, \text{ căci } \rho = \frac{m}{V}\right)$:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \qquad (15.49)$$

și în particular pentru o undă *progresivă :*

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \gamma\frac{v}{c}. \qquad (15.50)$$

15.8.3. VITEZA SUNETULUI ŞI VITEZA TERMICĂ

Reamintindu-ne de *viteza pătratică medie* (viteza termică) v_T a moleculelor unui gaz:

$$v_T = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \qquad (15.51)$$

putem scrie pentru viteza sunetului în gaze:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \cdot v_T < v_T, \; c > \frac{1}{\sqrt{3}} v_T = 0{,}58\, v_T, \qquad (15.52)$$

$$0{,}58\, v_T < c < 0{,}75\, v_T.$$

Pentru gaze monoatomice $\gamma = 5/3$, deci $c \cong 0{,}75\, v_T$; pentru gaze biatomice (aer) $\gamma = 7/5$, deci $c = 0{,}68\, v_T$; pentru gaze poliatomice c se apropie de $0{,}6\, v_T$.

15.9. DENSITATEA DE ENERGIE A UNDEI

Energia cinetică a particulelor care oscilează raportată la unitatea de volum nedeformat (în absenţa undei) este $w_c = \frac{dm}{dV_0} \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \rho_0 v^2$.

Am calculat în capitolul 12 energia elastică de deformare pe unitatea de volum (nedeformat):

$$w_p = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \text{ (bară)}; \quad w_p = \frac{1}{2K} (\Delta p)^2 \text{ (fluid)}.$$

Ţinînd seama de expresia vitezei undei elastice $c^2 = E/\rho_0$ (15.27) sau $c^2 = K_{ad}/\rho_0$ (15.40), de expresia deformaţiei $\varepsilon = -v/c$ (15.16) şi a variaţiei de presiune $\Delta p = \rho_0 c v$ (15.42) în unda *progresivă*, energia elastică (potenţială) de deformare pe unitatea de volum devine:

$$w_p = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = w_c, \; w_p = \frac{1}{2K_{ad}} (\Delta p)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = w_c, \qquad (15.53)$$

deci coincide cu energia cinetică a unităţii de volum. Prin urmare, energia cinetică şi cea potenţială a undei plane *progresive* variază în *concordanţă de fază,* spre deosebire de cazul oscilatorului armonic individual. Energia totală pe unitatea de volum va fi atunci:

$$\frac{dW}{dV_0} = w = \rho_0 v^2 = \frac{1}{\rho_0 c^2} (\Delta p)^2. \qquad (15.54)$$

În cazul undei plane *monocromatice*:

$$w = \rho_0 A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx), \; \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2. \qquad (15.55)$$

Densitatea de energie a undei este proporţională cu pătratul amplitudinii de oscilaţie a particulelor şi cu pătratul frecvenţei (şi cu densitatea mediului).

Ca ordin de mărime, pentru sunetele obişnuite în aer:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2 \sim \frac{1}{2} \cdot 1{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (10^{-6})^2 \text{m}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-2} = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

15.10. FLUXUL DE ENERGIE. INTENSITATEA SUNETULUI

Propagîndu-se, unda sonoră pune în mişcare oscilatorie noi şi noi particule; în faţa frontului de undă mediul este în repaus, în timp ce în spatele frontului de undă particulele mediului oscilează; prin urmare *unda transportă energie.* Acest transport (transfer) de energie nu este însoţit de un transport de substanţă, deoarece particulele mediului execută în timpul propagării undei numai oscilaţii în jurul poziţiilor lor de echilibru.

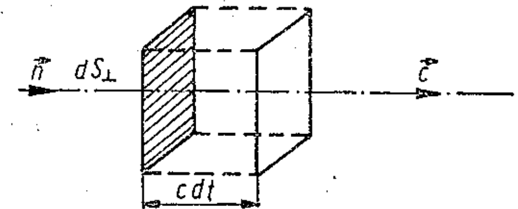


Fig. 15.9

15.10.1. FLUXUL DE ENERGIE

Să calculăm cantitatea de energie transportată de unda progresivă într-un timp dt printr-un element de suprafaţă $dS_\perp$ aşezat perpendicular pe direcţia de propagare a undei. După trecerea timpului dt vor fi excitate în faţa elementului $dS_\perp$ toate particulele cuprinse într-un cilindru cu baza $dS_\perp$ şi înălţimea $c\,dt$ (fig. 15.9), prin urmare:

$$dW = w\, dS_\perp\, c\, dt = w\, d\vec{S}\, \vec{c}\, dt.$$

Fluxul de energie *reprezintă energia care trece printr-o suprafaţă oarecare dată în unitatea de timp* (se măsoară în J/s = W).

Fluxul de energie elementar prin suprafaţa elementară dS va fi deci

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = w\vec{c}\, d\vec{S} = \vec{i}\, d\vec{S}, \; \vec{i} = w\vec{c}, \qquad (15.56)$$

de unde *densitatea fluxului de energie,* adică fluxul de energie prin *unitatea de arie* aşezată perpendicular pe direcţia de propagare:

$$i = \frac{dW}{dt\, dS_\perp} = wc = \rho_0 c v^2 = \frac{(\Delta p)^2}{\rho_0 c}, \; \vec{i} = w\vec{c}, \; [i] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \qquad (15.57)$$

15.10.2. INTENSITATEA SUNETULUI

Valoarea medie a densității fluxului de energie se numește **intensitatea sunetului (sau a undei)** :

$$I \overset{\text{def}}{=} \langle i \rangle = \rho_0 c \langle v^2 \rangle = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{1}{\rho_0 c} \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{1}{\rho_0 c} (\Delta p)_{ef}^2, \qquad (15.58)$$

$$[I] = 1 \text{ W/m}^2 \text{ în SI},$$

unde am introdus *valorile efective* :

$$v_{ef} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v^2 \rangle}, \quad (\Delta p)_{ef} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle (\Delta p)^2 \rangle}. \qquad (15.59)$$

Vom numi **presiune sonoră** *valoarea efectivă a variației de presiune* :

$$p_s \overset{\text{def}}{=} (\Delta p)_{ef} = \sqrt{\langle (\Delta p)^2 \rangle}, \; p_s = \rho_0 c v_{ef}. \qquad (15.60)$$

Atunci intensitatea sunetului :

$$I = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{p_s^2}{\rho_0 c} = p_s v_{ef}, \; (p_s = \rho_0 c v_{ef}). \qquad (15.61)$$

În cazul undei plane *monocromatice* :

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho_0 c v_{max}^2 = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{1}{2\rho_0 c} (\Delta p)_{max}^2 = \frac{p_s^2}{\rho_0 c}. \qquad (15.62)$$

Intensitatea sunetului este proporțională cu pătratul valorii efective a vitezei de oscilație a particulelor sau cu pătratul presiunii sonore.

Ca ordin de mărime pentru sunetele obișnuite :

$$I = \langle w \rangle c \sim 2{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2,$$

$$p_s = \rho_0 c \frac{A\omega}{\sqrt{2}} \sim \frac{1{,}3}{\sqrt{2}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 2\pi 10^3 \text{s}^{-1} \cong 2 \text{ N/m}^2.$$

15.11. ANALOGIA ACUSTICO-ELECTRICĂ

Prin analogie cu mărimile caracteristice curentului alternativ, produsul $\rho_0 c = R_a$ se numește *rezistență (impedanță) acustică* (în $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{s/m}^3$). Viteza particulelor v corespunde intensității momentane i a curentului, iar variația de presiune Δp corespunde tensiunii alternative u. Intensitatea sunetului I corespunde puterii (medii) P a curentului alternativ.

Pentru aer în condiții normale :

$$R_a = \rho_0 c = 1{,}293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 334 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 428 \text{ N} \cdot \text{s/m}^3.$$

Mărimi acustice	Mărimi electrice
viteza v, [m/s]	intensitatea curentului i, [A]
variația de presiune Δp, [N/m²]	tensiunea u, [V]
presiunea sonoră p_s, [N/m²]	tensiunea efectivă U, [V]
rezistența acustică $R_a = \rho_0 c$, $\left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}\right]$	rezistența R, [Ω]
$\Delta p = \rho_0 c \cdot v = R_a v$	$u = Ri$
$p_s = \rho_0 c \cdot v_{ef} = R_a v_{ef}$	$U = RI$
intensitatea sunetului I, [W/m²]	puterea P, [W]
$I = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{p_s^2}{\rho_0 c} = p_s v_{ef}$	$P = RI^2 = \frac{U^2}{R} = UI$

15.12. UNDA SFERICĂ

În cazul undelor sferice (în mediu lipsit de absorbție) fluxul de energie prin *orice* suprafață sferică (de orice rază) cu centrul în sursă este constant, egal cu puterea sursei :

Φ = (densitatea fluxului)·(aria sferei) = const,

de unde densitatea fluxului de energie trebuie să fie invers proporțională cu aria sferei deci cu pătratul distanței pînă la sursă. Prin urmare, *în cazul undei sonore sferice, intensitatea sunetului variază invers proporțional cu pătratul distanței pînă la sursă.*

Cum densitatea fluxului de energie a undei monocromatice este proporțională cu *pătratul* amplitudinii, rezultă că amplitudinea undei sferice monocromatice trebuie să fie invers proporțională cu distanța pînă la centrul undelor sferice. Rezultă că elongațiile particulelor în unda sferică progresivă monocromatică sînt :

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr). \qquad (15.63)$$

unde r este distanța pînă la sursa undelor sferice.

15.13. UNDA DE ȘOC

Dacă un corp (glonț, avion supersonic, chiar o navă pe suprafața apei) se deplasează într-un fluid cu viteză mai mare decît viteza undelor (sunetului), atunci apare așa-numita *undă de șoc*.

În adevăr, dacă la un moment dat corpul se află în punctul A (fig. 15.10), după trecerea timpului t, corpul se deplasează în punctul B cu $AB = vt$, iar frontul undei emise în A va avea raza $AC = ct < vt$. Frontul undei va avea forma unui con cu vîrful în corp și semideschiderea α, dată de

$$\sin \alpha = c/v. \tag{15.64}$$

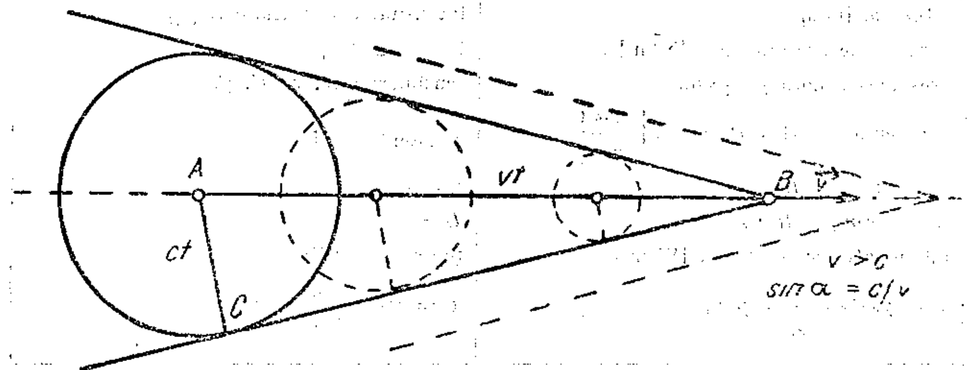


Fig. 15.10

Vîrful undei de șoc (vîrful conului) se deplasează cu viteza v a corpului, iar suprafața laterală a conului se deplasează pe direcția normală la generatoarea conului cu viteza $c < v$.

15.14. INTERFERENȚA

Dacă în mediu există mai multe surse de oscilații, atunci în mediu se propagă mai multe procese ondulatorii și particulele mediului sînt solicitate simultan la mai multe mișcări oscilatorii. După cum arată experiența, elongația rezultantă a particulei se compune *vectorial* din elongațiile produse *separat și independent* de fiecare oscilație. Acesta este *principiul suprapunerii* (superpoziției) undelor, adică a suprapunerii *independente* a proceselor ondulatorii sau oscilatorii. Două unde „trec una prin cealaltă" fără a se perturba reciproc. Principiul suprapunerii este o consecință matematică a *liniarității* ecuațiilor diferențiale care descriu procesele ondulatorii (suma mai multor soluții ale ecuațiilor liniare este de asemenea o soluție). Desigur, ecuațiile diferențiale liniare reprezintă doar o primă aproximare a proceselor din mediile reale.

Fenomenul suprapunerii undelor, cu întărirea sau slăbirea reciprocă a oscilațiilor, se numește *interferența undelor*.

Interes deosebit îl prezintă cazul a două surse care oscilează cu *aceeași frecvență* și au diferența de fază a oscilațiilor *constantă*; astfel de surse se numesc *coerente*. În acest caz, tabloul de interferență este *staționar*, amplitudinile oscilațiilor în diferite puncte sînt constante în timp.

Fie două surse coerente $S_{1,2}$ care oscilează *în fază* și un punct P situat la distanțele $r_{1,2}$ de surse (fig. 15.11). Elongațiile $\xi_{1,2}$ produse de fiecare undă și presupuse pe *aceeași direcție* se adună, atunci, algebric:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos(\omega t - kr_1) + A_2 \cos(\omega t - kr_2). \tag{15.65}$$

Analog calculului de la § 14.3, amplitudinea rezultantă va fi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k(r_2 - r_1)}. \tag{15.66}$$

Mărimea amplitudinii rezultante depinde de diferența de fază $\Delta\varphi = k(r_2 - r_1)$ sau de diferența de drum $\Delta r = r_2 - r_1$ a celor două oscilații

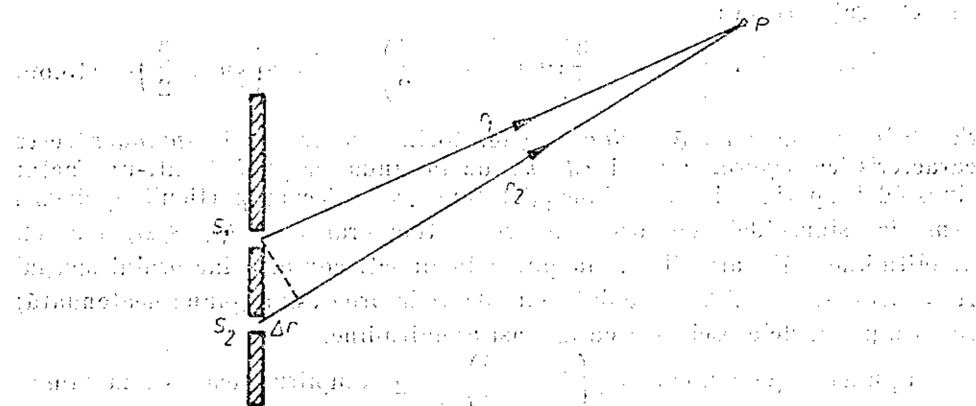


Fig. 15.11

care se suprapun. Amplitudinea rezultantă este maximă cînd diferența de drum este un multiplu întreg de lungimi de undă sau un multiplu par de semiunde (adică de jumătăți de lungime de undă):

$$A = A_1 + A_2,\ r_2 - r_1 = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2},\ n \text{ — întreg}, \tag{15.67}$$

și minimă, cînd diferența de drum este un multiplu impar de semiunde:

$$A = |A_1 - A_2|,\ r_2 - r_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2},\ n \text{ — întreg}. \tag{15.68}$$

Dacă amplitudinile componente sînt egale, minimele se reduc la zero.

Fenomenul de interferență este frumos ilustrat de undele de suprafață care se formează pe apă la aruncarea simultană a două pietricele, la o anumită distanță între ele.

15.15. UNDELE STAȚIONARE

Un caz interesant de interferență este suprapunerea undei incidente cu unda reflectată pe aceeași direcție Ox. În general unda reflectată va fi defazată față de cea incidentă cu un anumit unghi β, dependent de condițiile fizice ale reflexiei, și va avea amplitudinea mai mică, deoarece o parte din unda incidentă este transmisă mai departe în mediul al doilea. Considerînd pentru simplificare amplitudini *egale*, elongația rezultantă va fi:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \beta) =$$

$$= 2A \cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right)$$

sau cu ajutorul reprezentării complexe:

$$\overline{\xi}(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Ae^{i(\omega t + kx + \beta)} = Ae^{i(\omega t + \beta/2)}\left(e^{-i(kx + \beta/2)} + e^{i(kx+\beta/2)}\right) = 2A\cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right)e^{i(\omega t + \beta/2)}$$

sau elongația reală:

$$\xi(x, t) = 2A\cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right) = A'\cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right). \qquad (15.69)$$

Se obține astfel o *undă staționară* (fig. 15.12). Pentru unda *staționară* este caracteristică *separarea* fazei $\omega t - kx$ de la unda *progresivă* într-un factor sinusoidal spațial și unul sinusoidal temporal. Fiecare particulă oscilează armonic, sinusoidal, conform factorului temporal $\cos(\omega t + \beta/2)$, dar cu amplitudinea A' variabilă de la punct la punct, conform factorului spațial $A' = 2A\cos(kx + \beta/2)$, spre deosebire de unda progresivă (plană neatenuată) în care particulele oscilează cu aceeași amplitudine.

În punctele pentru care $\cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) = \pm 1$ amplitudinea este maximă, egală cu $2A$ (ventre sau umflături). În punctele pentru care $\cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) = 0$ amplitudinea este nulă, particulele de acolo sînt permanent în repaus (noduri).

Distanța dintre două ventre sau două noduri succesive este dată de condiția:

$$\Delta\varphi = k\Delta x = \pi, \quad \Delta x = \lambda/2. \qquad (15.70)$$

În fig. 15.12 sînt reprezentate elongațiile particulelor în cinci momente succesive, la un interval $T/8$; în momentul 3 din figură toate particulele trec simultan prin pozițiile lor de echilibru.

Particulele situate între două noduri vecine (succesive) oscilează toate *în fază*: toate se depărtează sau se apropie de pozițiile lor de echilibru, trec simultan prin pozițiile de echilibru și simultan își ating elongațiile maxime

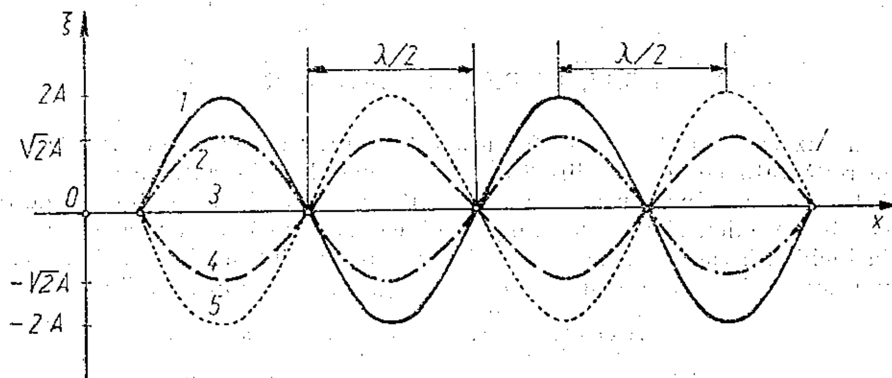


Fig. 15.12

(amplitudinile). La traversarea unui nod faza oscilațiilor se schimbă cu π (amplitudinea schimbă semnul), spre deosebire de unda progresivă în care faza variază în mod continuu de la punct la punct.

Pentru *deformația* relativă în unda staționară avem:

$$\varepsilon(\text{sau } \gamma) = \frac{\partial\xi}{\partial x} = -2kA\sin(kx + \beta/2)\cos(\omega t + \beta/2), \qquad (15.71)$$

adică *amplitudinea deformației este maximă în noduri și nulă în ventre.*

De exemplu, în unda staționară longitudinală comprimările și rarefierile au amplitudinea maximă în noduri. Anume, de o parte și alta a unui nod particulele se mișcă în sensuri opuse, pe cînd într-un ventru particulele se mișcă în același sens.

Variația densității și presiunii într-un fluid într-o undă staționară longitudinală are amplitudine maximă tot în noduri:

$$\Delta\rho = -\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial x} = 2kA\rho_0\sin(kx + \beta/2)\cos(\omega t + \beta/2), \quad \Delta p = c^2\Delta\rho. \qquad (15.72)$$

Pe suprafața pe care se produce reflexia se formează un nod, dacă mediul pe care se reflectă unda este mai dens decît mediul în care se propagă unda. În acest caz, unda își schimbă prin reflexie faza cu $\beta = \pi$, astfel încît elongația își schimbă semnul și prin compunere cu elongația incidentă rezultă un nod, altfel spus, unda pierde prin reflexie o jumătate de lungime de undă $\lambda/2$ (corespunzător defazării cu $\beta = \pi$).

În cazul reflexiei pe un mediu mai puțin dens, faza undei nu se schimbă prin reflexie, astfel încît elongațiile se adună și se obține un ventru pe suprafața de separație.

Dacă unda reflectată are amplitudine mai mică decît unda incidentă, $A_r < A$, rezultă o suprapunere de undă progresivă și undă staționară, în ventre amplitudinea este maximă $A + A_r$, iar în „noduri" este minimă $A - A_r$.

15.16. PRINCIPIUL LUI HUYGENS. DIFRACȚIA UNDELOR

Dacă în drumul undei se află un obstacol de *dimensiuni comparabile cu lungimea de undă* sau un paravan cu un orificiu (sau fantă), se observă *fenomenul de ocolire a obstacolului de către undă sau de curbare a razelor* (care sînt perpendiculare pe frontul de undă) (fig. 15.13). Acesta este fenomenul de *difracție* a undelor, care împreună cu interferența, reprezintă două fenomene tipic *ondulatorii*.

Construcția frontului de undă și a razelor se poate face cu ajutorul *principiului lui Huygens* (1690):

Fiecare punct al mediului la care a ajuns frontul de undă constituie o nouă sursă de oscilații care se propagă înainte. Înfășurătoarea tuturor acestor suprafețe de undă elementare dă noul front de undă.

Două orificii mici (sau fante înguste) într-un ecran, atinse de frontul de undă, constituie două surse *coerente* de oscilații, astfel încît în spatele ecranului se obține un tablou de difracție și interferență (Thomas Young, 1802).

Undele sonore (cu frecvențele $\nu \approx 20 \div 20\,000$ Hz) au în aer ($c = 340$ m/s) lungimile de undă $\lambda \sim 2$ cm $\div$ 20 m, de aceea pentru undele sonore fenomenul de difracție se observă foarte ușor pentru obstacole obișnuite: ferestre deschise, vehicule etc.

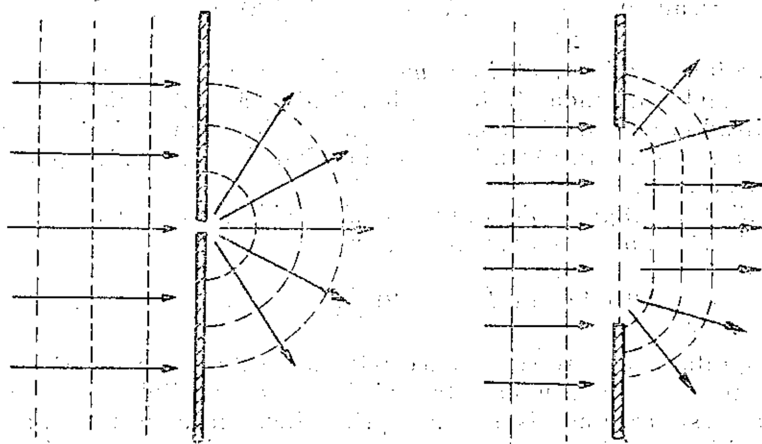


Fig. 15.13

Astfel, stînd în cameră, chiar la un etaj superior, auzim ușor sunetele de pe stradă, care pătrund prin fereastra deschisă. La fel auzim vorbirea unui om aflat în spatele unui autobuz sau unui gard înalt.

15.17. REFLEXIA ȘI REFRACȚIA UNDELOR

Unda incidentă pe suprafața de separație a două medii suferă parțial o reflexie și parțial o refracție.

15.17.1. REFLEXIA UNDELOR

Fie o undă plană cu suprafața de undă AB, care ajunge la suprafața de separație (fig. 15.14). Unda care se propagă din punctul B ajunge după un anumit timp t în B', parcurgînd distanța $c_1 t = BB' = AB' \sin \alpha_1$. În același timp unda reflectată din punctul A ajunge în A', parcurgînd o distanță egală: $c_1 t = AA' = AB' \sin \alpha_1'$, de unde rezultă $\alpha_1' = \alpha_1$.

Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

Vectorii de undă, incident $\vec{k}_1$ și reflectat $\vec{k}_1'$, sînt egali în modul:

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega}{c_1} = k_1', \quad (\lambda_1' = \lambda_1), \tag{15.73}$$

iar proiecțiile lor pe planul de separație sînt egale:

$$k_1 \sin \alpha_1 = k_1' \sin \alpha_1', \ (k_1 = k_1', \ \alpha_1 = \alpha_1'). \tag{15.74}$$

Introducînd versorul normalei $\vec{n}$ la suprafața de separație, putem scrie vectorial:

$$\vec{k}_1 \times \vec{n} = \vec{k}_1' \times \vec{n}, \tag{15.75}$$

ceea ce înglobează și proprietatea că *raza incidentă $\vec{k}_1$ și cea reflectată $\vec{k}_1'$ sînt în același plan cu normala $\vec{n}$.*

15.17.2. REFRACȚIA UNDELOR

În timp ce unda din B ajunge în B' unda *refractată* din punctul A se propagă în același timp în celălalt mediu în A'', parcurgînd distanța $c_2 t = AA'' = AB' \sin \alpha_2$, de unde rezultă *legea refracției*:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = \ldots = \frac{\sin \alpha}{c} = \text{const}, \tag{15.76}$$

Din legea refracției rezultă egalitatea componentelor *tangențiale* (la suprafața de separație) ale vectorilor de undă:

$$k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2 = k \sin \alpha = \text{const} \tag{15.77}$$

astfel încît ambele legi a reflexiei și a refracției se pot scrie sub formă vectorială:

$$\vec{k}_1 \times \vec{n} = \vec{k}_1' \times \vec{n} = \vec{k}_2 \times \vec{n}, \quad \vec{k} \times \vec{n} = \text{const}, \tag{15.78}$$

$$(k_1 = \omega/c_1 = k_1', \quad k_2 = \omega/c_2),$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața de separație.

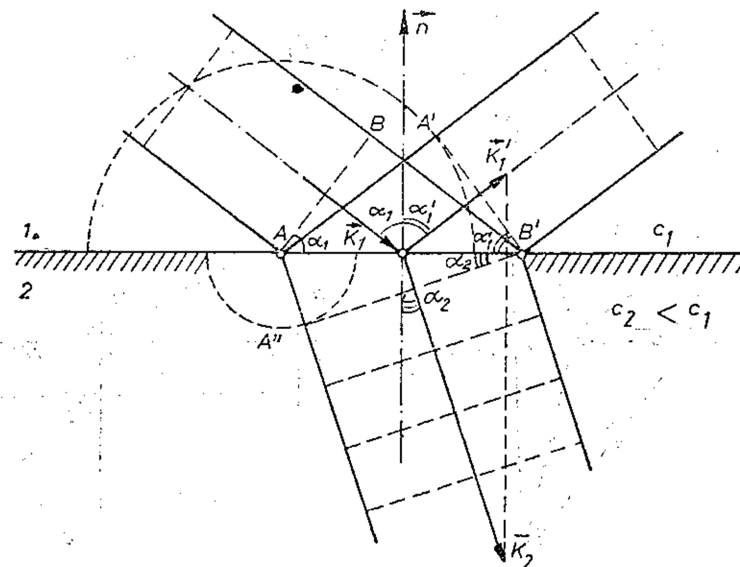


Fig. 15.14

Dacă $c_2 < c_1$, din (15.76) rezultă $\alpha_2 < \alpha_1$, adică *raza deviază totdeauna spre regiunea de viteză de propagare mai mică.*

De exemplu, în gaze viteza sunetului crește cu temperatura. Vara, la amiază, pămîntul este înfierbîntat și temperatura aerului scade cu înălțimea, atunci razele sonore deviază în sus și audibilitatea este scăzută. Seara, pămîntul se răcește și apare o creștere a temperaturii aerului de la sol în sus, razele sonore deviază în jos și audibilitatea este mai bună.

15.17.3. REFLEXIA TOTALĂ

Dacă unda vine dintr-un mediu cu viteza c_1 mai mică decît viteza c_2 din celălalt mediu, se poate produce pe suprafața de separație *reflexia totală:* raza refractată dispare. Pentru aceasta unghiul de incidență α_1 trebuie să fie mai mare decît unghiul limită dat de condiția :

$$\alpha_2 = \pi/2, \ \sin \alpha_{1l} = c_1/c_2 < 1. \qquad (15.79)$$

În realitate, chiar în cazul reflexiei totale, unda pătrunde și dincolo de suprafața de separație, în mediul 2, dar este *rapid* atenuată. Dacă însă mediul 2 este foarte îngust, urmat din nou de mediul 1, atunci o parte din undă se va propaga în mediul 2 („efect tunel").

15.17.4. PRINCIPIUL LUI FERMAT

Legile reflexiei și refracției se pot obține din condiția ca timpul de propagare a undei de-a lungul razei reale să fie *minim* (*principiul lui Fermat*). În adevăr, pentru reflexie avem construcția simplă din fig. 15.15, iar pentru refracție, din fig. 15.16 rezultă condiția pentru timpul de propagare :

$$t = \frac{d_1}{c_1 \cos \alpha_1} + \frac{d_2}{c_2 \cos \alpha_2} = \min \text{ și } d_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + d_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = d.$$

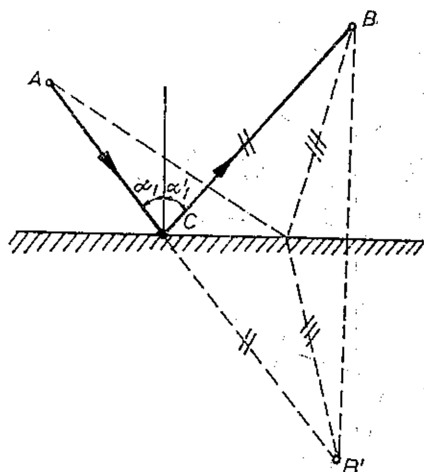


Fig. 15.15

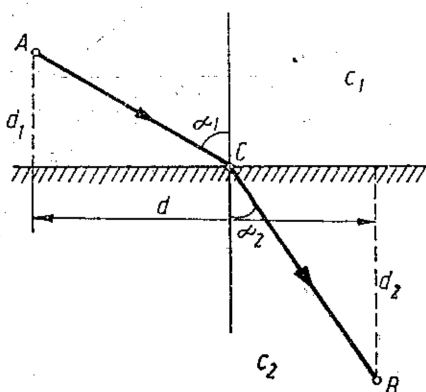


Fig. 15.16

Diferențiind ecuațiile :

$$\frac{d_1 \sin \alpha_1}{c_1 \cos^2 \alpha_1} \mathrm{d}\alpha_1 + \frac{d_2 \sin \alpha_2}{c_2 \cos^2 \alpha_2} \mathrm{d}\alpha_2 = 0 \, ; \qquad \frac{d_1}{\cos^2 \alpha_1} \mathrm{d}\alpha_1 + \frac{d_2}{\cos^2 \alpha_2} \mathrm{d}\alpha_2 = 0,$$

trecînd al doilea termen în dreapta și împărțind ecuațiile obținute membru la membru, obținem legea refracției (15.76).

Considerațiile de mai sus stau la baza unor principii foarte generale și importante în fizică : *principiile variaționale* (*al minimei acțiuni*) Lagrange, Hamilton.

15.18. EFECTUL DOPPLER

Efectul Doppler constă în *variația frecvenței* înregistrate de un receptor R atunci cînd sursa S sau receptorul R se apropie sau se depărtează unul față de celălalt. Nu intervin în acest efect decît componentele *longitudinale* ale vitezelor pe direcția sursă-receptor și nu cele transversale pe această direcție.

Fenomenul se explică prin faptul că unda care se propagă în mediu apare extinsă sau comprimată după cum se mișcă sursa sau receptorul față de mediu. De exemplu, dacă receptorul se deplasează în întîmpinarea undei, el va înregistra o frecvență mai mare, iar dacă se îndepărtează — o frecvență mai mică. Astfel, o barcă ce vine în întîmpinarea valurilor sau fuge din fața valurilor, va fi lovită de valuri cu o frecvență mărită, respectiv micșorată, față de cazul cînd ar sta pe loc sau s-ar deplasa paralel cu valurile.

Vitezele se consideră prin convenție pozitive atunci cînd sursa sau receptorul se apropie între ele.

Dacă primul maxim al elongației, emis de sursă în poziția S, fig. 15.17, ajunge la receptor în poziția R după timpul $t_1 = SR/c$, atunci al doilea maxim va fi emis de sursă după timpul $T = 1/\nu$ în poziția S', cu $SS' = v_s T$, și va ajunge la receptor în poziția R', după timpul $t_2 = S'R'/c$ sau la momentul $T + t_2$ socotit de la emiterea primului maxim. Dar diferența de timp $(T + t_2) - t_1$ dintre sosirile celor două maxime succesive ale elongației, înregistrate de receptor, este tocmai perioada înregistrată $T' = 1/\nu'$, deci $T + t_2 - t_1 = T'$ și $RR' = v_r T'$. Din figură rezultă :

$$v_s T + v_r T' = c(t_1 - t_2) = c(T - T'),$$

$$T' = T \frac{c - v_s}{c + v_r} \text{ sau } \nu' = \nu \frac{c + v_r}{c - v_s}. \qquad (15.80)$$

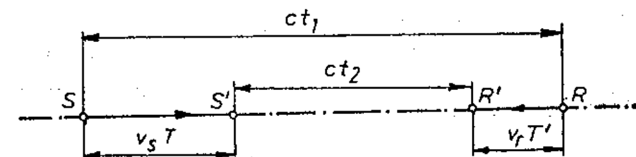


Fig. 15.17

Aceasta este formula efectului Doppler.

Dacă sursa sau receptorul se apropie unul de celălalt ($v_r > 0$ sau $v_s > 0$) frecvența înregistrată ν' va fi mai înaltă decît frecvența ν în cazul repausului. Dacă sursa sau receptorul se depărtează unul de celălalt ($v_r < 0$ sau $v_s < 0$) frecvența înregistrată va fi mai coborîtă. Efectul nu este simetric față de

vitezele sursei şi receptorului, fiindcă depinde *separat şi în mod diferit* de viteza sursei *faţă de mediu* şi de viteza receptorului *faţă de mediu* şi *nu de viteza relativă* a unuia faţă de celălalt. Pentru viteze mici faţă de viteza sunetului, efectul depinde, *în primă aproximaţie*, de viteza relativă :

$$\nu' \approx \nu(1 + v_{rel}/c). \tag{15.81}$$

Este uşor de observat efectul, de exemplu, la trecerea unui tren rapid printr-o gară dacă trenul fluieră, sau la trecerea prin faţa noastră a unei maşini sau motociclete care claxonează. Variaţia relativă de frecvenţă va fi în acest caz :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2cv_s}{c^2 - v_s^2} \approx 2\frac{v_s}{c}. \tag{15.82}$$

Există un efect analog şi în cazul undelor electromagnetice (Doppler—Fizeau), dar este simetric în cele două viteze (depinde de viteza relativă sursă-receptor). De asemenea, există la undele electromagnetice şi un efect Doppler transversal (mult mai slab).

15.19. DISPERSIA. VITEZA DE GRUP

Dacă viteza de propagare a undei (viteza de fază) depinde de lungimea de undă sau de frecvenţă, $c = c(\nu)$, se observă fenomenul de dispersie : undele de diferite frecvenţe (sau lungimi de undă) se propagă cu viteze diferite.

O undă sinusoidală, infinită în spaţiu şi timp, cu amplitudine constantă, nu poartă nici o informaţie. Numai *semnalele*, mărginite în spaţiu şi timp, formate dintr-un *grup (pachet) de unde* cu frecvenţe ω apropiate între ele şi vectori de undă $\vec{k}$, apropiaţi între ei, poartă o anumită informaţie (de exemplu, o sinusoidă întreruptă într-un anumit ritm). Datorită interferenţei undelor componente, semnalul este mărginit în spaţiu şi timp. *Maximul* amplitudinii rezultante, deci şi al densităţii de *energie* (pătratică în amplitudine) se va propaga cu o viteză, numită *viteză de grup* v_g, diferită în general de viteza undelor componente.

15.19.1. CAZUL A DOUĂ UNDE

Să considerăm la început pentru simplificare *două* unde de frecvenţe $\omega_{1,2}$ şi numerele de undă $k_{1,2}$ care se propagă în sensul axei Ox. *Maximul* amplitudinii rezultante se va găsi la momentul t_0 în punctul x_0 în care fazele coincid (sau diferă prin $2n\pi$) :

$$\varphi_1 = \omega_1 t_0 - k_1 x_0 = \varphi_2 - \omega_2 t_0 - k_2 x_0$$

sau

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t_0 - (k_2 - k_1)x_0 = 0.$$

În momentul următor $t_0 + \mathrm{d}t$ punctul de maximă amplitudine se va găsi deplasat în $x_0 + \mathrm{d}x$, $(\mathrm{d}x = v_g\,\mathrm{d}t)$, în care fazele de asemenea coincid :

$$(\omega_2 - \omega_1)(t_0 + \mathrm{d}t) - (k_2 - k_1)(x_0 + \mathrm{d}x) = 0.$$

Ţinînd seama de prima condiţie, rezultă

$$(\omega_2 - \omega_1)\,\mathrm{d}t - (k_2 - k_1)\,\mathrm{d}x = 0$$

de unde viteza de grup

$$v_g = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \tag{15.83}$$

15.19.2. CAZUL UNUI GRUP DE UNDE

Fie acum un *grup de unde* cu frecvenţele într-un interval *mic* $\Delta\omega$ şi vectorii de undă $\vec{k}$ într-un interval tridimensional *mic* $\Delta^3\vec{k}$. Maximul amplitudinii sau al densităţii de energie (centrul grupului) se va găsi la momentul t_0 în punctul $\vec{r}_0$ unde fazele $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ ale oscilaţiilor componente coincid (sau diferă prin mărimi mici de ordin superior), astfel încît interferenţa lor este constructivă şi nu destructivă. Aceasta înseamnă că în punctul de maximă amplitudine (centrul de energie) al grupului (pachetului) de unde trebuie să avem :

$$\mathrm{d}\varphi = t_0\mathrm{d}\omega - \vec{r}_0\,\mathrm{d}\vec{k} = 0.$$

În momentul următor $t_0 + \mathrm{d}t$, centrul grupului se va găsi deplasat în $\vec{r}_0 + \mathrm{d}\vec{r}$, $(\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}_g\,\mathrm{d}t)$, unde de asemenea fazele coincid :

$$(t_0 + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\omega - (\vec{r}_0 + \mathrm{d}\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{k} = 0.$$

Prin urmare, avem condiţia

$$\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{k} = 0 \text{ sau } \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega - \vec{v}_g\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\vec{k} = 0.$$

Scriind dezvoltat

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\,\mathrm{d}k_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\,\mathrm{d}k_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\,\mathrm{d}k_z = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\,\mathrm{d}\vec{k} = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\,\omega\cdot\mathrm{d}\vec{k},$$

rezultă imediat viteza de grup :

$$\vec{v}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\,\omega. \tag{15.84}$$

Aceasta este viteza de grup cu care se deplasează centrul de energie sau maximul amplitudinii grupului de unde.

Dacă frecvenţa ω depinde numai de $|\vec{k}| = k$ (medii izotrope), atunci viteza de grup are valoarea

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}, \quad \left(v_f = c = \frac{\omega}{k}\right), \tag{15.85}$$

spre deosebire de viteza de fază $c = \omega/k$.

Fig. 15.18

Sub altă formă avem (formula lui Rayleigh):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} = -\lambda^2 \frac{d(c/\lambda)}{d\lambda} =$$

$$= c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \qquad (15.86)$$

Dacă viteza de fază c nu depinde de lungimea de undă λ, adică în absența dispersiei, viteza de grup v_g coincide cu viteza de fază c; forma grupului de unde nu se schimbă în timpul propagării, pachetul de unde sau semnalul nu se deformează. Altfel, în cazul dispersiei, forma semnalului se schimbă, datorită vitezei diferite de propagare a undelor componente.

15.19.3. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ

Se poate da o construcție grafică pentru viteza de grup (fig. 15.18):

$$OB = AC - DC = c - BD\,\mathrm{tg}\,\alpha = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = v_g.$$

Se vede și din construcția grafică, fig. 15.18, că intervalul de lungimi de undă (sau de frecvențe) ale grupului de unde trebuie să fie suficient de *mic*, pentru ca viteza de grup să fie bine definită.

În cazul dispersiei *normale*, cînd undele mai lungi se propagă mai repede decît cele scurte (cazul din figură), *dispersia* $dc/d\lambda > 0$ și $v_g < c$.

În cazul undelor *sonore*, viteza de fază practic *nu depinde* de frecvență de aceea *dispersia sunetelor este neglijabilă.*

15.20. UNDELE DE SUPRAFAȚĂ

La suprafața apei (lichidelor) iau naștere binecunoscutele unde de suprafață. Experiența arată că la amplitudini nu prea mari traiectoriile particulelor de lichid sînt *circulare*. Particulele de la suprafață descriu cercuri cu razele cele mai mari, iar cele din profunzime descriu cercuri cu raze din ce în ce mai mici. De aici rezultă imediat, prin construcție grafică, forma undei de suprafață (fig. 15.19), care *nu este sinusoidală*: vîrfurile (dealurile) sînt mult mai ascuțite decît adînciturile (văile). Amplitudinea undei este egală cu raza cercului descris de particulele de lichid.

a) Se poate arăta că pentru undele *foarte lungi* (de exemplu, mareele), cînd $\lambda \gg h$, ($\lambda \sim 100$ km), unde h este adîncimea apei, avem

$$c = \sqrt{gh}. \qquad (15.87)$$

Fig. 15.19

Pentru undele de suprafață obișnuite ($\lambda < h$):

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}, \quad \sigma \text{ — tensiunea superficială}, \qquad (15.88)$$

unde primul termen reprezintă contribuția forțelor gravitaționale, iar al doilea contribuția tensiunii superficiale în restabilirea suprafeței orizontale de echilibru a lichidului.

b) Pentru *undele marine* obișnuite predomină primul termen, contribuția forțelor capilare fiind neglijabilă:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = g\frac{T}{2\pi}, \qquad (15.89)$$

de exemplu, pentru $T = 10$ s, $c = 56$ km/h, $\lambda = 156$ m.

c) Dimpotrivă, pentru undele cu $\lambda \ll h$, ($\lambda \lesssim 1$ cm), predomină al doilea termen: *undele capilare* („încrețiturile" la suprafața apei):

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \qquad (15.90)$$

Viteza (15.88) are un minim cînd cele două viteze (15.89) și (15.90) sînt egale între ele:

$$c_{\min} = \sqrt[4]{\frac{\sigma g}{\rho}} \text{ pentru } \lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \qquad (15.91)$$

Pentru apă (fig. 15.20):

$$c_{\min} = 0{,}23 \text{ m/s pentru } \lambda_m = 1{,}70 \text{ cm}. \qquad (15.92)$$

Undele de suprafață manifestă net fenomenul de dispersie:
$c = f(\lambda)$ (15.88), caracterizat de *dispersia* $dc/d\lambda$.

Pentru undele marine (15.89): $v_g = c/2$ (dispersia normală), iar pentru undele capilare (15.90): $v_g = 3c/2$ (dispersia anomală).

15.21. ABSORBȚIA UNDELOR

În procesul propagării undelor are loc totdeauna o transformare ireversibilă (disipare) a energiei sonore, adică a energiei mecanice a oscilațiilor ordonate ale particulelor, în energia internă a mediului (căldură). Din această cauză se produce *absorbția* sunetului, adică intensitatea undei scade treptat

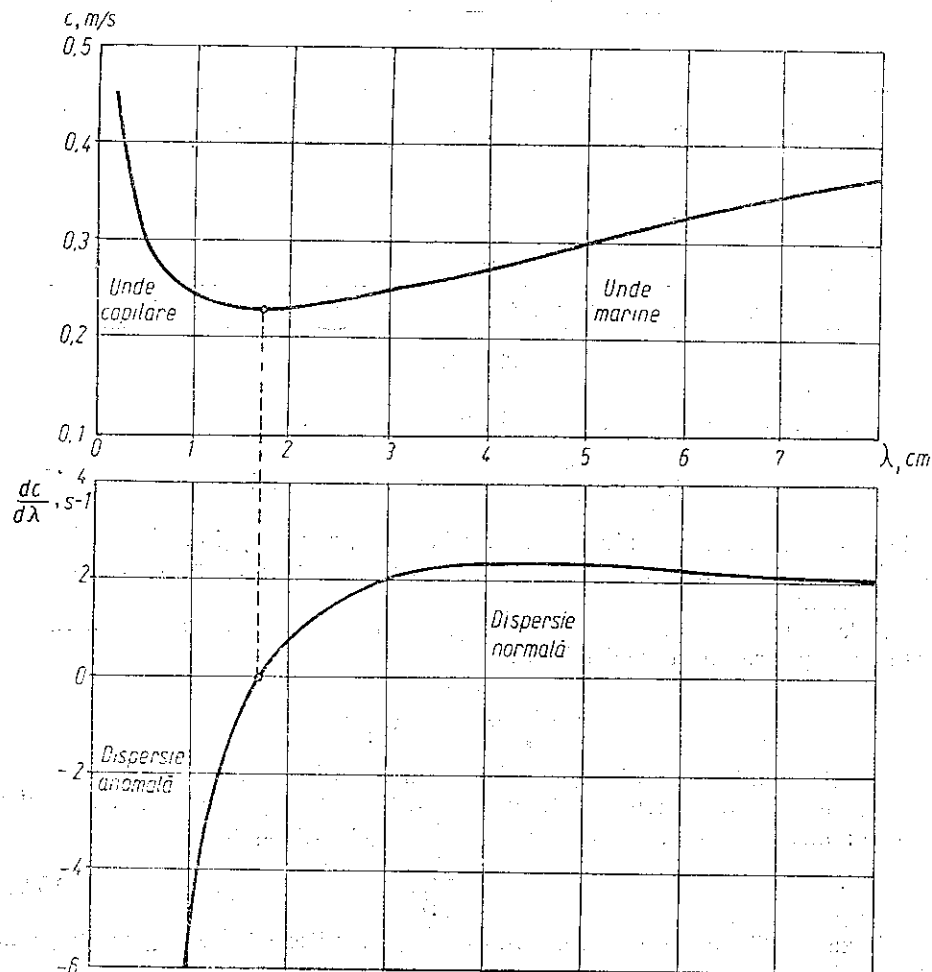


Fig. 15.20

pe măsura propagării ei. Pe o porțiune infinitezimală dx (fig. 15.21) amplitudinea undei A scade cu o cantitate infinitezimală proporțională cu porțiunea de mediu parcursă dx și cu amplitudinea A sau altfel spus, scăderea *relativă* a amplitudinii $-dA/A$ este proporțională cu grosimea dx a stratului străbătut:

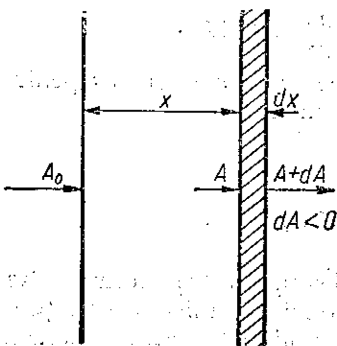


Fig. 15.21

$$dA = -\varkappa A\, dx, \quad \frac{dA}{A} = -\varkappa\, dx, \tag{15.93}$$

unde $\varkappa$ este *constanta de atenuare a amplitudinii*, $[\varkappa] = L^{-1} = m^{-1}$. Prin integrare rezultă:

$$A = A_0\, e^{-\varkappa x}, \tag{15.94}$$

unde A_0 este amplitudinea la $x = 0$ și x este distanța străbătută de undă. Prin urmare, amplitudinea scade exponențial cu distanța parcursă.

Pe o distanță $\delta = 1/\varkappa$, numită *lungime de atenuare*, amplitudinea scade de $e \cong 2,718$ ori.

Intensitatea undei fiind proporțională cu amplitudinea la pătrat, se va atenua după legea:

$$I = I_0\, e^{-2\varkappa x}, \tag{15.95}$$

unde $2\varkappa$ este *coeficientul de absorbție sonoră* al mediului. În fluide acest coeficient depinde de viscozitate (frecare internă) și de conductivitatea termică, de asemenea de frecvența sunetului și densitatea mediului. De exemplu, la lichide $\varkappa \sim \nu^2$, iar la solide $\varkappa \sim \nu$.

Ecuația undei plane monocromatice, într-un mediu absorbant devine acum:

$$\xi(x, t) = A_0\, e^{-\varkappa x} \cos(\omega t - kx). \tag{15.96}$$

În cazul propagării unui *grup de unde* (semnal), forma sa la sosire poate diferi de original, din cauza atenuării diferite a undelor componente.

Constantele de atenuare $\varkappa$ în 10^{-3} m^{-1}

Frecvența ν, kHz	1	2	4	6	8	10
aer, 20°C	0,3	1,0	3,8	8,4	14,5	22

Pentru frecvențe mari, $\nu \sim 10$ MHz, avem pentru apă la 20°C: $\varkappa = 25 \cdot 10^{-15}\, \nu^2$. Pentru $\nu \sim 10$ MHz avem pentru oțel $\varkappa = 5$ m^{-1} și pentru sticlă $\varkappa = 2$ m^{-1}.

PROBLEME

15.1. Ecuația unei unde sonore în aer este

$$\xi(x, t) = 10^{-5} \cos 2\pi(340\, t - x).$$

Să se calculeze: a) frecvența, lungimea de undă și viteza de propagare a sunetului; b) Amplitudinea variației relative a densității aerului și a presiunii în unda sonoră; c) Intensitatea sunetului, știind densitatea aerului $\rho = 1,3$ kg/m³.

R. a) $\nu = 340$ Hz, $\lambda = 1,00$ m, $c = 340$ m/s;

b) $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)_m = \frac{\omega A}{c} = 6,3 \cdot 10^{-5}$, $\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)_m = \gamma \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)_m = 8,8 \cdot 10^{-5}$;

c) $I = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 A^2 = 0,10$ W/m².

15.2. O undă sonoră cu lungimea de undă $\lambda = 44{,}3$ cm se propagă în aer aflat în condiții normale ($\rho_0 = 1{,}29$ kg/m³, $c = 334$ m/s). Amplitudinea de vibrație a particulelor $A = 1{,}00 \cdot 10^{-5}$ m. Să se calculeze: a) variația efectivă a densității aerului; b) presiunea sonoră; c) intensitatea sunetului.

R. a) $(\Delta\rho)_{ef} = \sqrt{2}\pi \dfrac{A}{\lambda}\ \rho_0 = 13 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; b) $p_s = c^2(\Delta\rho)_{ef} = 14\ \text{N/m}^2$;

$$\text{c)}\ I = p_s^2/R_a = 0{,}33\ \text{W/m}^2.$$

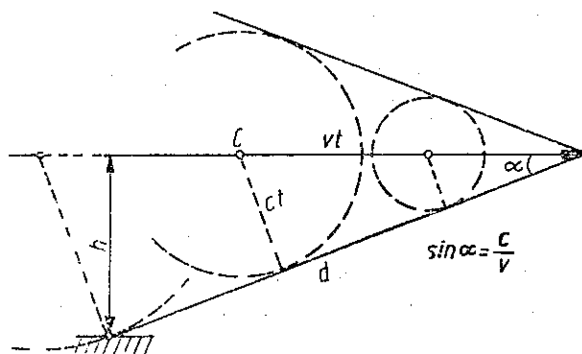


Fig. 15.22

15.3. Un avion cu reacție zboară cu viteza constantă $v = 500$ m/s la altitudinea $h = 6{,}8$ km. Care este forma frontului undei de șoc produsă de avion? La ce distanță de o casă se află avionul în momentul cînd geamurile casei încep să vibreze? Viteza sunetului $c = 340$ m/s.

R. Con cu semideschiderea α, $\sin\alpha = c/v$ (fig. 15.22),

$$d = hv/c = 10\ \text{km}.$$

15.4. Să se calculeze indicele de refracție a sunetului la suprafața de separație aer-sticlă, cunoscînd densitatea sticlei $\rho = 2\,600$ kg/m³, modulul de elasticitate $E = 7 \cdot 10^{10}$ N/m² și viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.

R. $n = c\sqrt{\dfrac{\rho}{E}} = 0{,}065.$

15.5. Știind viteza c_0 a sunetului în aer la 0°C, să se calculeze timpul de propagare a sunetului în aer de la sol pînă la o înălțime h, dacă temperatura variază liniar pe această distanță de la T_1 la T_2 după legea $T = a - by^2$.

R. $t = \dfrac{h}{c_0}\sqrt{\dfrac{T_0}{T_1 - T_2}}\ \text{arc sin}\sqrt{1 - \dfrac{T_2}{T_1}}.$

15.6. Să se calculeze densitatea de energie cinetică, potențială și totală medie într-o undă staționară $\xi(x, t) = A\cos(kx + \beta)\cos(\omega t + \alpha)$.

R. $w_c = \dfrac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 \cos^2(kx + \beta)\sin^2(\omega t + \alpha),$

$$w_p = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 \sin^2(kx + \beta)\cos^2(\omega t + \alpha);\quad \langle w\rangle = \frac{1}{4}\rho_0\omega^2 A^2 = \text{const.}$$

15.7. Un observator fix ascultă sunetele emise de două diapazoane identice de frecvență $\nu = 1\,000$ Hz, dintre care unul se depărtează, iar celălalt se apropie de observator cu aceeași viteză. Observatorul aude bătăi de frecvență $\nu_b = 10$ Hz. Care este viteza diapazoanelor, dacă viteza sunetului este $c = 340$ m/s?

R. [redacted]$v \cong c\,\nu_b/2\nu = 1{,}7$ m/s.

15.8. O sursă de frecvență $\nu = 1{,}00$ kHz se mișcă pe normala la un perete, cu viteza $v = 3{,}4$ m/s. Viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s. Un receptor este așezat pe aceeași normală la perete: a) între sursă și perete S—R—P; b) în exterior R—S—P; c) fixat solidar pe sursă. Să se calculeze frecvența bătăilor înregistrate de receptor.

R. a) 0; b) $\nu_b = \nu\dfrac{2cv}{c^2 - v^2} \approx 2\nu\dfrac{v}{c} = 20$ Hz; c) $\nu_b = \nu\dfrac{2v}{c \mp v} \approx 2\nu\dfrac{v}{c} = 20$ Hz.

15.9. Pe normala la un perete se află o sursă sonoră de frecvență $\nu = 1{,}00$ kHz și un receptor. Dacă peretele se depărtează cu viteza $v = 1{,}0$ m/s ce frecvență a bătăilor înregistrează receptorul? (Viteza sunetului $c = 340$ m/s.)

R. $\nu_b = 2\nu\dfrac{v}{c + v} \approx 2\nu\dfrac{v}{c} = 5{,}9$ Hz.

15.10. Pe o axă se află o sursă de sunete de frecvență $\nu = 1{,}00$ kHz care oscilează de-a lungul axei cu frecvența unghiulară $\omega = 34\ \dfrac{\text{rad}}{s}$ și amplitudinea $A = 10$ cm. Ce interval de frecvențe aude un observator fix situat pe axă? (Viteza sunetului $c = 340$ m/s.)

R. $\Delta\nu = \nu\dfrac{2\omega A/c}{1 - (\omega A/c)^2} \cong \nu\dfrac{2\omega A}{c} = 20$ Hz.

15.11 Un tub OA se rotește într-un plan vertical în jurul unei axe orizontale prin O, cu viteza unghiulară $\Omega = \text{const.}$ În tub se află o bilă grea fixată printr-un resort de capătul O. La $t = 0$ tubul este orizontal, bila în repaus și resortul neîntins de lungime x_0. Să se afle legea de mișcare a bilei față de tub și frecvența de rezonanță, știind frecvența oscilațiilor libere ω ale bilei pe resort pentru tubul orizontal fix (se neglijează frecările).

R. $x = \dfrac{x_0}{\omega^2 - \Omega^2}(\omega^2 - \Omega^2\cos\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}\cdot t) + \dfrac{g}{\omega^2 - 2\Omega^2}\left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}}\sin\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}\cdot t\right),$

pentru $\Omega < \omega$; $x = x_0 + \dfrac{g}{\omega}t + \dfrac{1}{2}x_0\omega^2 t^2 - \dfrac{g}{\omega^2}\sin\omega t,$

pentru $\Omega = \omega$; $\omega_{rez} = \omega/\sqrt{2}.$

CAPITOLUL 16

SISTEME ACUSTICE

Sistemele acustice sînt *sisteme oscilante*, care generează unde sonore, precum coarde, membrane, plăci vibrante, tuburi sonore, sau receptoare de sunete. Urechea omenească este un receptor excepţional, el analizează sunetul ca un aparat spectral, descompunîndu-l în spectrul oscilaţiilor armonice simple (spre deosebire de ochiul omenesc).

16.1. COARDA VIBRANTĂ

16.1.1. VITEZA UNDELOR TRANSVERSALE

Să studiem vibraţiile transversale ale unei coarde întinse de o forţă F. Vom presupune că oscilaţiile tuturor punctelor coardei se produc într-un acelaşi plan fix, pe care îl alegem plan $Ox\xi$ (fig. 16.1). Presupunem coarda elastică, omogenă şi absolut flexibilă, adică tensiunea F este *tangentă* la coardă (fără forţe transversale), adică este valabilă legea Hooke. Neglijăm forţele de frecare cu mediul exterior şi neglijăm greutatea proprie a coardei.

Considerăm numai oscilaţiile *mici*, astfel încît coarda deviază foarte puţin de la linia dreaptă Ox. Atunci unghiul α dintre tangenta la coardă şi axa Ox va fi mic:

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,\ t) = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha, \quad \sin\alpha \approx \alpha, \quad \cos\alpha \approx 1. \tag{16.1}$$

Să considerăm un segment infinitezimal (elementar) ds de coardă de masă dm. Deoarece punctele coardei se mişcă transversal, nu avem acceleraţie şi forţă în direcţia Ox (în cadrul aproximaţiilor făcute), de aceea:

$$F'\cos\alpha' - F\cos\alpha = 0, \quad \cos\alpha' \approx 1, \quad \cos\alpha \approx 1 \rightarrow F' \approx F, \tag{16.2}$$

adică în primă aproximaţie tensiunea este aceeaşi de-a lungul coardei (independentă de x). La fel, lungimea arcului ds coincide în primă aproximaţie cu dx, deoarece $dx \cong ds\cos\alpha \approx ds$, deci şi densitatea rămîne aceeaşi în primă aproximaţie.

Pe direcţia transversală forţa rezultantă asupra elementului dm este

$$F'\sin\alpha' - F\sin\alpha \approx F(\alpha' - \alpha) \approx F\left[\frac{\partial}{\partial x}\xi(x + dx,\ t) - \frac{\partial}{\partial x}\xi(x,\ t)\right] =$$

$$= F\frac{\partial}{\partial x}[\xi(x + dx,\ t) - \xi(x,\ t)] = F\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,\ t)\,dx = F\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx, \tag{16.3}$$

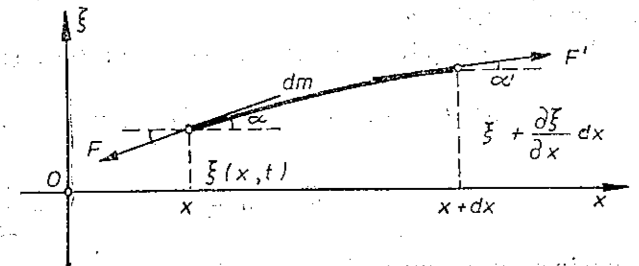


Fig. 16.1

şi conform ecuaţiei fundamentale a dinamicii

$$F\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx = dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \rho S\,dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2};$$

de unde rezultă ecuaţia diferenţială a vibraţiilor transversale ale coardei libere, ecuaţia binecunoscută a undelor:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \tag{16.4}$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad \sigma = \frac{F}{S}, \quad c = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}, \ (\rho_l = \rho S) \tag{16.5}$$

unde c este deci *viteza undelor transversale în coardă* ($\rho_l = \rho S$ — densitatea *liniară* a coardei). Expresia ei este analoagă vitezei undelor elastice într-un solid ($c_l = \sqrt{E/\rho}$, $c_t = \sqrt{G/\rho}$) sau într-un fluid ($c = \sqrt{K_{ad}/\rho}$), în particular în gaz ($c = \sqrt{\gamma p/\rho}$), rolul modulului elastic îl joacă acum tensiunea elastică σ din coardă.

16.1.2. FRECVENŢELE PROPRII

Ecuaţia undelor (16.4) admite ca soluţii atît unde progresive, cît şi unde *staţionare*:

$$\xi(x,\ t) = A\cos(kx + \beta)\cos(\omega t + \alpha). \tag{16.6}$$

În adevăr, derivatele parțiale sînt

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2\xi, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k^2\xi, \text{ dar } c = \frac{\omega}{k}, \tag{16.7}$$

și ele verifică ecuația undelor (16.4). Constantele A, α și β se determină din condițiile inițiale și la *margine* (pe frontieră).

De exemplu, pentru o coardă fixată la capătul $x = 0$ trebuie să avem acolo permanent $\xi(0, t) = 0$, adică un *nod*, de aceea

$$\xi(x, t) = A \sin kx \cdot \cos \omega t. \tag{16.8}$$

Prin alegerea factorului spațial $\sin kx$, condiția pentru capătul $x = 0$ este automat verificată.

Dacă și celălalt capăt $x = l$ este fixat (*nod* și la acest capăt), atunci:

$$\xi(l, t) = 0, \quad \sin kl = 0, \quad kl = n\pi, \quad l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n \in N,$$

$$\nu_n = n\frac{c}{2l} = n\nu_1, \quad \nu_1 = \frac{c}{2l}. \tag{16.9}$$

Lungimea corzii cuprinde un număr întreg de jumătăți de lungime de undă (de semiunde).

Frecvențele ν_n se numesc *frecvențele proprii* ale corzii. Frecvența $\nu_1 = \frac{c}{2l}$ este frecvența *fundamentală* (prima armonică); frecvențele ν_n, $n > 1$, sînt frecvențele *armonicilor* superioare, egale cu un multiplu întreg al frecvenței fundamentale (fig. 16.2).

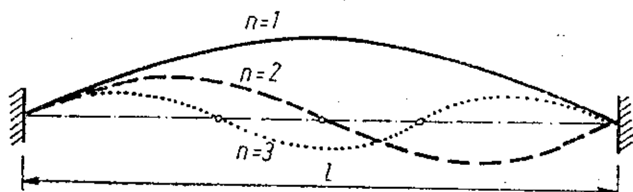


Fig. 16.2

Undele staționare sînt în realitate totdeauna *amortizate* din cauza frecărilor cu mediul exterior.

O vibrație arbitrară a corzii reprezintă o *suprapunere* a vibrațiilor proprii, cu anumite amplitudini și faze inițiale.

16.2. TUBURILE SONORE

Analog coardei vibrante, și în cazul tuburilor sonore avem un șir infinit de *vibrații proprii*. Frecvențele proprii se obțin din *condițiile la margine*. La tuburile sonore obișnuite excitarea undei staționare în coloana de aer se face la un capăt al tubului cu ajutorul unei lame pusă în vibrație prin suflarea aerului, prin urmare la acest capăt avem un *ventru* și ecuația undelor staționare va fi atunci:

$$\xi(x, t) = A \cos kx \cos \omega t. \tag{16.10}$$

Celălalt capăt al tubului poate fi închis (tuburi sonore închise) și acolo se va forma atunci un *nod*, sau deschis (tuburi sonore deschise) și atunci se va forma acolo un *ventru* (fig. 16.3).

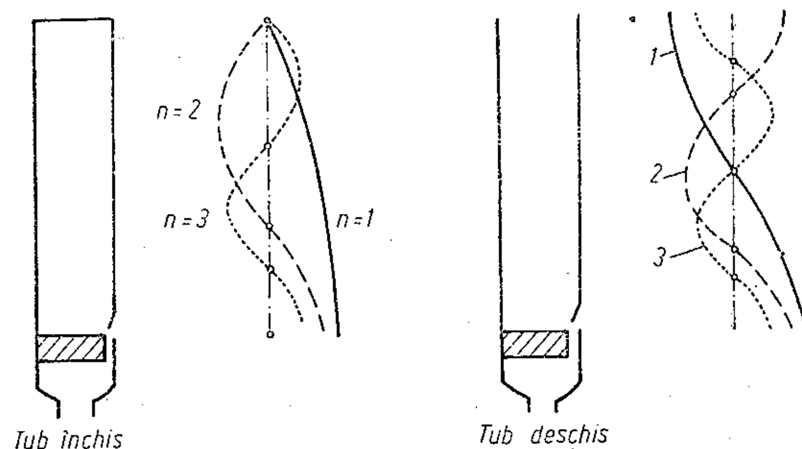


Fig. 16.3

La tuburi *închise*:

$$\cos kl = 0, \quad kl = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad l = (2n-1)\frac{\lambda}{4}, \quad n \in N,$$

$$\nu = (2n-1)\frac{c}{4l} = (2n-1)\nu_1, \quad \nu_1 = \frac{c}{4l}, \tag{16.11}$$

deci *lungimea tubului închis este egală cu un număr impar de sferturi de lungime de undă $\lambda/4$ și se pot forma numai armonici* **impare**: *frecvențele proprii sînt multipli impari ai frecvenței fundamentale.*

La tuburile *deschise*:

$$\cos kl = \pm 1, \quad kl = n\pi, \quad l = n\frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{4}, \quad n \in N,$$

$$\nu_n = n\frac{c}{2l} = n\nu_1, \quad \nu_1 = \frac{c}{2l}, \tag{16.12}$$

deci *lungimea tubului deschis este egală cu un număr* **par** *de $\lambda/4$* (sau număr întreg de $\lambda/2$) *și se pot forma toate armonicile.*

Frecvența fundamentală a unui tub sonor deschis este de două ori mai mare decît frecvența fundamentală a aceluiași tub sonor închis.

16.3. NIVELUL SONOR

Urechea omenească este un spectroscop care determină intensitatea vibrațiilor într-o scară *logaritmică* și frecvențele lor (între anumite limite). De exemplu, pentru $\nu \sim 1$ kHz, intensitatea minimă a pragului auditiv inferior $I_0 \cong 10^{-12}$ W/m² și intensitatea maximă a pragului auditiv superior $I_m \cong 10^2$ W/m², deci un interval de intensități excepțional de întins: $I_m/I_0 \cong 10^{14}$! deci 14 ordine de mărime ! Dacă ținem seama că suprafața timpanului este sub 1 cm², atunci energia incidentă pe secundă, la pragul auditiv inferior, este de $\sim 10^{-16}$ J ! Capacitatea de a aprecia sunetele ca intensitate este de aproximativ $\Delta I/I = 0{,}25$, iar ca frecvență de aproximativ $\Delta\nu/\nu = 0{,}3$ (între 1 și 6 kHz).

16.3.1. LEGEA LUI WEBER ȘI FECHNER

Conform **legii Weber-Fechner** *variația intensității senzației este proporțională cu* **logaritmul** *raportului dintre intensitățile respective ale excitației*:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \lg \frac{I_2}{I_1} \text{ sau } S - S_0 = k \lg \frac{I}{I_0}. \tag{16.13}$$

Dacă intensitatea excitației crește în progresie **geometrică**, *intensitatea senzației crește în progresie* **aritmetică**.

Deși această lege nu este riguroasă, ea este mult mai apropiată de realitate decît, de exemplu, o lege de proporționalitate.

16.3.2. NIVELUL DE INTENSITATE SONORĂ

De aici rezultă necesitatea de a introduce pentru caracterizarea mărimilor electroacustice (în telefonie, radiodifuziune etc.) mărimi corespunzătoare intensității senzației, conform legii Weber-Fechner. Astfel se definește *nivelul de intensitate sonoră L* măsurat în beli (B) (după numele lui Bell) sau în neperi (după numele lui Neper):

$$L \overset{\text{def}}{=} \lg \frac{I}{I_0} \text{ în B sau } L = \ln \frac{I}{I_0} \text{ în Np}, \tag{16.14}$$

unde I_0 este intensitatea de referință, de obicei pragul auditiv inferior la 1 kHz: $I_0 = 10^{-12}$ W/m². Practic, se folosește unitatea decibel (dB). Cum intensitatea sunetului este proporțională cu pătratul presiunii sonore, rezultă:

$$L \overset{\text{def}}{=} 10 \lg \frac{I}{I_0} = 20 \lg \frac{(\Delta p)_{ef}}{(\Delta p)_0} = 20 \lg \frac{p_s}{p_{s0}} \text{ în dB}, \tag{16.15}$$

unde presiunea sonoră $p_{s0} \cong 2 \cdot 10^{-5}$ N/m² corespunde pragului intensității $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

16.3.3. NIVELUL DE INTENSITATE AUDITIVĂ (TĂRIA SUNETULUI)

Intensitatea *senzației auditive* depinde nu numai de intensitatea sonoră a excitației, ci și de frecvență, fiind maximă între 1 și 3 kHz, de aceea legea Weber-Fechner (16.13) se scrie astfel:

$$S(I, \nu) - S(I_0, \nu) = k(\nu) \lg \frac{I(\nu)}{I_0}, \tag{16.16}$$

unde constanta de proporționalitate k depinde de frecvența sunetului, avînd un maxim aproape de 2 kHz, unde urechea are sensibilitate maximă.

Dacă alegem intensitatea sonoră de referință I_0 *variabilă* cu frecvența, *corespunzător pragului auditiv inferior*, adică corespunzător lui $S(I_0, \nu) = 0$, deci $I_0(\nu)$, obținem formula *intensității senzației* în funcție de intensitatea excitației:

$$S(I, \nu) = k(\nu) \lg \frac{I(\nu)}{I_0(\nu)}, \tag{16.17}$$

unde $I_0(\nu)$ descrie curba pragului auditiv inferior (fig. 16.4). Normînd constanta $k(\nu)$ la valoarea $k = 10$ pentru $\nu = 1$ kHz, formula (16.17) definește nivelul intensității *auditive* sau *tăria sunetului* în phoni (phon).

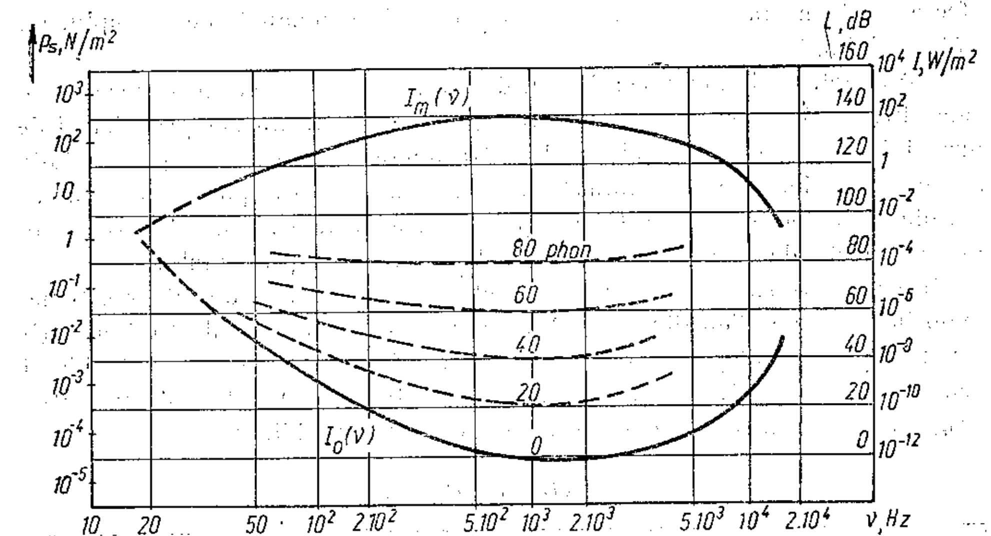


Fig. 16.4

Prin urmare, *tăria sunetului exprimată în phoni este egală cu nivelul sonor exprimat în decibeli al sunetului de referință de 1 kHz care produce aceeași intensitate a senzației auditive.*

Phonul este deci unitatea pentru *senzația auditivă*.

Un phon corespunde aproximativ puterii de rezoluție a urechii relativ la tăria sunetului (puterea de rezoluție în frecvență este $\Delta\nu/\nu \approx 0{,}02$).

Practic, reglăm intensitatea sunetului de referință de 1 kHz pînă obținem aceeași intensitate a senzației auditive (aceeași tărie subiectivă a sunetului)

cu cea a sunetului de măsurat. Atunci nivelul sonor în decibeli al sunetului de referință (etalonat de exemplu după presiunea sonoră) ne dă tăria în phoni a sunetului măsurat.

Intensitatea senzației auditive a oricărui sunet, de orice frecvență, se întinde de la zero phoni la pragul auditiv inferior, cînd sunetul nu se mai aude, pînă la 140 phoni la pragul auditiv superior cînd începem să percepem o presiune sonoră dureroasă.

Constanta $k(\nu)$ din (16.17) se poate determina experimental. În afara domeniului auzibil (16—20 000 Hz) ea este nulă.

16.3.4. URECHEA UMANĂ

Intervalul de frecvențe auzibile este cuprins între 16 Hz și 20 kHz.

Infrasunetele (0—16 Hz) sînt percepute de anumite animale: păsări și pești; dacă se stîrnește o furtună ele aud infrasunetele respective și se refugiază sau se retrag din zona respectivă. La fel, în cazul cutremurelor, unele animale percep infrasunetele însoțitoare și intră în panică, înainte ca omul să sesizeze unda seismică.

La om infrasunetele de anumite frecvențe produc somnolență, iar altele efecte foarte neplăcute (se pare, unele efecte de rezonanță, de exemplu, cu bătăile inimii).

Tot astfel, unele animale: liliecii, delfinii, emit și percep *ultrasunete* ($\nu >$ >20 kHz). Deoarece $\lambda < 2$ cm, ultrasunetele manifestă net proprietăți de directivitate. Emițînd impulsuri de ultrasunete dirijate și recepționîndu-le reflectate pe obiecte, aceste animale se orientează în spațiu (pot sesiza și mișcarea obiectelor pe baza efectului Doppler). Ultrasunetele de anumite frecvențe produc efecte de iritație asupra animalelor ca și asupra omului.

În cazul *urechii umane*, pe baza multor măsurători la diferite persoane, se obțin curbele *mediate* din figura 16.4. Se vede că întreaga scală a intensităților auditive cuprinde 140 phoni pentru oricare frecvență audibilă: zero phoni pentru pragul auditiv inferior (pentru oricare frecvență) și 140 phoni pentru pragul auditiv superior (pentru oricare frecvență audibilă).

Tabel de tării sonore

Sursa	Tăria, phon
Tic-tacul unui ceasornic, la distanța de 1 m	20
Cameră liniștită sau șoapte	30
Pași sau vorbire încetă, la distanța de 1 m	40
Vorbire obișnuită, la distanța de 1 m	65
Vorbire tare, la distanța de 5 m	70
Vorbire tare, la distanța de 1 m	80
Stradă zgomotoasă	90
Orchestră mare sau zgomotul unei motociclete	100
Zgomotul unui motor de avion (la 3—5 m)	130

După cum am spus, urechea are sensibilitate maximă în intervalul 1—3 kHz, pragul auditiv inferior atinge aici valoarea $I_0 \cong 10^{-12}$ W/m². Presiunea sonoră efectivă, în aer, corespunzătoare acestui prag, este după cum am spus, $p_{s0} \cong 2\cdot10^{-5}$ N/m²:

$$I = \frac{(\Delta p)^2_{ef}}{\rho_0 c} = \frac{p_s^2}{R_a}, \quad p_s = \sqrt{IR_a} = \sqrt{10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\cdot 428\ \frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}^3}} = 2{,}06\cdot10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}. \tag{16.18}$$

Amplitudinea corespunzătoare de vibrație a moleculelor, la frecvența de 1 kHz:

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 c\omega^2 A^2, \quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{R_a}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot10^3\ \mathrm{s^{-1}}}\sqrt{\frac{2\cdot10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}{428\ \mathrm{N\cdot s/m^3}}} = 1{,}09\cdot10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}1\ \text{Å}, \tag{16.19}$$

adică o zecime din diametrul unui atom de hidrogen! La pragul auditiv superior intensitatea sonoră ajunge la $I_m \approx 100$ W/m², presiunea sonoră $p_s \approx$ ≈ 200 N/m², iar amplitudinea de vibrație a moleculelor la 1 kHz: $A \approx 10^{-4}$ m $=$ $= 0{,}1$ mm. Urechea este deci un aparat care măsoară mărimi *de la nivelul atomic pînă la nivelul macroscopic*! (la fel ca și ochiul).

16.4. ANALIZA SUNETELOR

16.4.1. SUNETE MUZICALE

O oscilație *periodică*, adică un sunet muzical, se poate descompune într-o serie de oscilații sinusoidale sau tonuri muzicale (serie Fourier):

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n). \tag{16.20}$$

Deoarece urechea omenească nu este sensibilă la defazajele oscilațiilor componente (G. S. Ohm), spectrul sunetului (amplitudinile A_n în funcție de frecvență) este suficient pentru a caracteriza sunetul, adică două sunete cu același spectru dau aceeași senzație auditivă. *Timbrul* sunetului este determinat de prezența și intensitatea armonicelor.

16.4.2. ZGOMOTE

Zgomotele sînt sunete *aperiodice*, cu amplitudine variabilă neregulat. Ele nu mai au un spectru de linii, ci un spectru *continuu* dat de integrala Fourier:

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} a(\omega)\cos[\omega t + \alpha(\omega)]\ d\omega, \tag{16.21}$$

unde graficul densității spectrale sau densității de amplitudine $a(\omega)$ dă spectrul continuu.

Prin urmare, orice oscilație este pînă la urmă o suprapunere (discontinuă-discretă sau continuă) de oscilații armonice, cu spectru de linii (frecvențe discrete) sau spectru continuu.

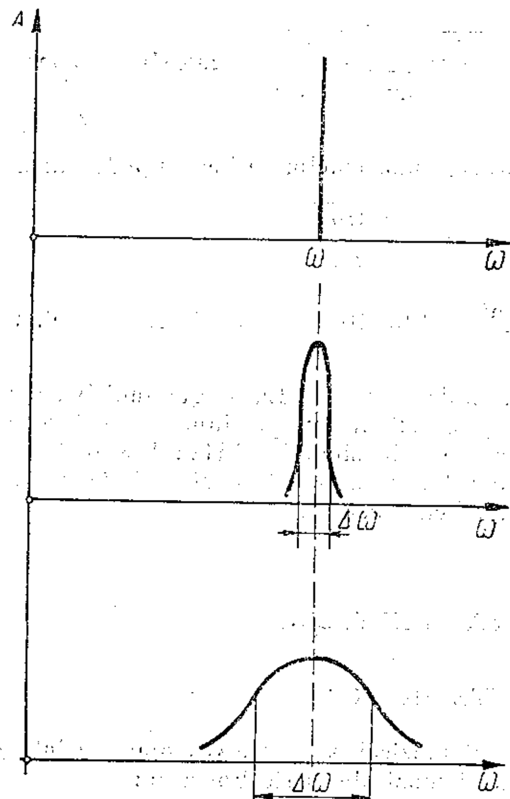


Fig. 16.5

Analiza sunetului se poate face cu ajutorul unor aparate electroacustice care transformă în prealabil oscilațiile sonore în oscilații electrice de aceeași formă și acestea din urmă sînt apoi descompuse în oscilații sinusoidale.

16.4.3. SPECTRUL

O sinusoidă (sau o undă plană monocromatică), infinită în spațiu și timp, are spectrul format dintr-o singură linie ω de amplitudine A. Un fragment de sinusoidă, mărginit în spațiu (Δx) și timp (Δt), are spectru continuu de lărgime $\Delta\omega$ în jurul frecvenței ω (fig. 16.5). Cu cît segmentul de sinusoidă este mai restrîns în spațiu și timp, cu atît spectrul său este mai larg:

$$\Delta k \sim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}. \qquad (16.22)$$

Cînd $\Delta x \to \infty$, $\Delta t \to \infty$, spectrul se îngustează și tinde către o singură linie spectrală, bine determinată ($\Delta\omega \to 0$, $\Delta k \to 0$). Dimpotrivă, cînd $\Delta x \to 0$ și $\Delta t \to 0$, spectrul se lărgește la nesfîrșit ($\Delta\omega \to \infty$, $\Delta k \to \infty$).

Știind că pentru o particulă elementară $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, regăsim în (16.22) relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg.

16.4.4. EFECTE NELINIARE

Noi ne-am mărginit numai la „acustica *liniară*", adică am păstrat numai termenii liniari în diferite relații, neglijînd termenii superiori (am „linearizat" ecuațiile sau ne-am restrîns la prima aproximație liniară).

La amplitudini mari se manifestă și termenii pătratici, care dau efecte specifice („acustica *neliniară*"). De exemplu, în radiotehnică, pentru amplitudini mari ale semnalului, caracteristica tuburilor electronice nu mai poate fi aproximată printr-o linie dreaptă și atunci termenii pătratici dau frecvențe *nedorite*, cum ar fi *diferența sau suma* frecvențelor a două sunete $\omega_{1,2}$. (Observăm că la aparatele cu medie frecvență — aceasta se obține tocmai cu ajutorul unei caracteristici neliniare.)

Astfel dacă pe lîngă termenul liniar, avem și un termen pătratic, atunci acest termen va da:

$$f(\xi) \sim \xi^2 = (A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} A_1^2(1 + \cos 2\omega_1 t) + \frac{1}{2} A_2^2(1 + \cos 2\omega_2 t) +$$

$$+ A_1 A_2[\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Frecvențele $2\omega_1$, $2\omega_2$ sînt mai puțin supărătoare, căci schimbă timbrul sau ies din domeniul auzibil, suma $\omega_1 + \omega_2$ poate de asemenea să iasă din domeniul auzibil, în schimb *diferența* $\omega_1 - \omega_2$ este supărătoare.

Dealtfel și urechea omenească este „neliniară", la amplitudini mari ale sunetelor, pe lîngă două tonuri $\omega_{1,2}$ auzim și tonul de frecvență $\omega_1 - \omega_2$ sau chiar alte tonuri „combinate": $\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + 2\omega_2$. Fenomenele fizice legate de auz sînt studiate în *acustica fiziologică*.

16.5. ULTRASUNETELE

Ultrasunetele au frecvențe de la 20 kHz în sus, pînă la frecvențe de ordinul 10 GHz (10^{10} Hz).

Ultrasunetele se obțin cu ajutorul anumitor cristale, numite *piezoelectrice* (piezocristale), care manifestă fenomenul de *electrostricțiune*, adică de contracție sau dilatare sub acțiunea unui cîmp electric. Cel mai folosit este cuarțul, din care se taie o placă (lamă) cu o anumită orientare față de axele cristalografice (piezocuarț). Grosimea plăcii se alege astfel încît să vibreze în rezonanță cu cîmpul electric alternativ aplicat (prin intermediul unui condensator). Astfel, pentru $\nu = 1$ MHz grosimea plăcii va fi ($c = 5{,}5$ km/s) (fig. 16.6):



Fig. 16.6

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu} = \frac{5\,500 \text{ m/s}}{2\cdot 10^6 \text{s}^{-1}} = 2{,}7 \text{ mm}. \qquad (16.23)$$

Aceeași lamă servește și ca receptor de ultrasunete, datorită efectului invers. Intrînd în vibrație de rezonanță sub acțiunea undei ultrasonore, lama se polarizează alternativ, adică pe fețele sale apar sarcini electrice alternative.

Se poate folosi și fenomenul de *magnetostricțiune*: variația dimensiunilor miezului magnetic al unei bobine sub acțiunea cîmpului magnetic, creat de curentul alternativ care străbate înfășurarea bobinei.

Ultrasunetele sînt absorbite puternic în gaze și slab în lichide și solide. Intensitatea ultrasunetelor poate atinge valori pînă la 10^5 W/m², iar presiunea pînă la $\sim$ 10 atm. Deoarece intensitatea este proporțională cu pătratul ampli-

tudinii și pătratul frecvenței, $I = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 A^2$, amplitudinile de vibrație a particulelor nu sînt mari.

Datorită lungimii de undă mici, fenomenul de difracție este slab exprimat pentru obstacolele obișnuite, astfel încît se obțin fascicule înguste, bine dirijate, de ultrasunete.

În lichide, în momentele de rarefiere, la intensități mari ale ultrasunetului, se pot produce ruperi ale lichidului : formarea de goluri sau cavități, în care pătrund gazele dizolvate și vaporii lichidului. Acest fenomen se numește *cavitație*. În momentele imediat următoare, de comprimare a cavității, se nasc presiuni foarte înalte. Cavitația explică de exemplu, distrugerea unor suprafețe solide (elice la vapoare).

Nașterea unor presiuni alternative mari și a unor accelerații mari ale particulelor în lichide în unda ultrasonoră explică o serie de efecte fizice ale ultrasunetelor și își găsește aplicații tehnice. Astfel cităm : formarea de emulsii din lichide nemiscibile (mercur și apă), dispersarea solidelor în lichide (sulf, mică, camfor în apă), coagularea aerosolilor și hidrosolilor, fisionarea unor macromolecule sau accelerarea unor reacții chimice.

Pe absorbția diferită a ultrasunetelor în gaze și solide se bazează *defectoscopia ultrasonoră* (nedestructivă) a pieselor metalice, adică descoperirea de goluri sau fisuri în interiorul piesei.

Hidrolocația ultrasonoră, adică detectarea obiectelor sau obstacolelor submarine, se bazează pe obținerea fasciculelor înguste, dirijate, de ultrasunete. Comunicația între submarine se poate menține cu ajutorul ultrasunetelor.

Ultrasunetele au aplicații și în biologie, de exemplu distrugerea unor microorganisme (bacterii) etc.

PROBLEME

16.1. O coardă întinsă cu forța $F_1 = 160$ N dă bătăi de frecvență $\nu_b = 20$ Hz cu un diapazon. Întinsă fiind cu forța $F_2 = 250$ N, ea vibrează la unison cu diapazonul. Să se afle frecvența diapazonului.

R. $\nu = \dfrac{\nu_b}{1 - \sqrt{F_1/F_2}} = 100$ Hz.

16.2. Sunetul fundamental emis de o coardă produce $\nu_b = 10$ Hz, bătăi pe secundă, cu sunetul emis de un diapazon. Dacă se scurtează coarda cu fracțiunea $f = 0,01 = 1\%$ din lungimea ei, ea intră în rezonanță cu diapazonul. Să se afle frecvența diapazonului.

R. $\nu = \dfrac{1}{f} \nu_b = 1\,000$ Hz.

16.3. O coardă de masă m este fixată la capete. Ea vibrează pe frecvența sa fundamentală ω cu amplitudinea maximă (în ventru) A_m. Să se calculeze energia cinetică maximă a corzii și energia cinetică medie

R. $E_{c\,max} = \dfrac{1}{4} m\omega^2 A_m^2$; $\langle E_c \rangle = \dfrac{1}{8} m\omega^2 A_m^2$.

16.4. Un tub sonor închis emite tonul fundamental de frecvență $\nu = 250$ Hz. Cunoscînd viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s, să se afle lungimea tubului și frecvența tonului fundamental emis de același tub dacă îl deschidem.

R. $l = \dfrac{c}{4\nu} = 0,34$ m, $\nu' = 2\nu = 500$ Hz.

16.5. Două tuburi sonore, unul închis și altul deschis, au aceeași lungime. Tubul deschis are frecvența fundamentală $\nu = 440$ Hz. Să se calculeze frecvența armonicii a III-a a tubului deschis și frecvența armonicii a 3-a a tubului închis.

R. $\nu_3 = 3\nu = 1\,320$ Hz; $\nu_3' = 3 \dfrac{\nu}{2} = 660$ Hz.

16.6. În timpul vorbirii normale presiunea sonoră este $p_s = 0.20 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$ la frecvența $\nu = 400$ Hz. Să se calculeze viteza efectivă a particulelor, amplitudinea oscilațiilor și intensitatea sunetului, cunoscînd rezistența acustică a aerului $R_a = 400$ N·s/m³. Care este nivelul sonor?

R. $v_{ef} = \dfrac{p_s}{R_a} = 0,5 \cdot 10^{-3}$ m/s · $A = \dfrac{\sqrt{2}\, p_s}{\omega R_a} = 0,28 \cdot 10^{-6}$ m,

$$I = \frac{p_s^2}{R_a} = 0,10 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2,\ L = 20 \lg \frac{p_s}{p_0} = 80 \text{ dB}.$$

16.7. Cîte surse sonore identice trebuie reunite pentru ca nivelul auditiv să crească cu $\Delta S = 10$ phon față de nivelul dat de o singură sursă ?

R. $N = 10^{\Delta S/10} = 10$.

16.8. La distanța $r = 20$ m de o sursă sonoră punctiformă de frecvență $\nu = 1,0$ kHz nivelul auditiv este $S = 20$ phon. La ce distanță sunetul nu se mai aude ? (se neglijează absorbția în aer).

R. $r' = r\sqrt{10^{S/10}} = 200$ m.

16.9. Un observator, situat la distanța $r_1 = 1,00$ m de un mic diapazon, măsoară un timp $t_1 = 33$ s de la momentul cînd aude sunetul emis de diapazonul lovit pînă în momentul cînd nu-l mai percepe. Situîndu-se la o distanță $r_2 = 10,0$ m de diapazon, observatorul măsoară acum un timp $t_2 = 10$ s, diapazonul fiind lovit identic. Să se calculeze coeficientul de amortizare b a vibrațiilor diapazonului (se neglijează absorbția sunetului în aer).

R. $b = \dfrac{2,3 \lg (r_2/r_1)}{t_1 - t_2} = 0,10$ s⁻¹.

16.10. Un oscilator elastic oscilează aproape sinusoidal, fiind slab amortizat datorită unei forțe proporționale cu viteza. Pentru a întreține totuși oscilații neamortizate se procedează astfel : la fiecare trecere a corpului prin poziția de echilibru se trage (împinge) brusc de celălalt capăt al resortului în sensul vitezei, cu o distanță constantă mică, altasă adecvat. Să se afle cît la sută din amplitudine trebuie să fie această distanță pentu a întreține oscilațiile, știind decrementul logaritmic D.

R. $\Delta x / A = \sqrt{D}$.

Coli de tipar 22,250. B.T. 31.VIII.1984.
Format 16/70×100. Apărut 1984.

I. P. „Oltenia“ Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România
Plan 9545/157/1984

